தொகை நுண்கணிதம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்
இரா. ஆறுமுகம், எம்.ஏ., எல்.டி.,
ஓய்வுபெற்ற முதல்வர்,
அரசினர் பயிற்சிக் கல்லூரி,
புதுக்கோட்டை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—322

தொகை நுண்கணிதம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

இரா. ஆறுமுகம், எம்.ஏ., எல்.டி.,

ஓய்வுபெற்ற முதல்வர்,

அரசினர் பயிற்சிக் கல்லூரி,

புதுக்கோட்டை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—May, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 322

© Tamil Nadu Text Book Society

INTEGRAL CALCULUS

R. Arumugam

Net Price Rs. 9-75
(No discount)

'Published by The Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare.'

Printed by
Muthukumaran Press,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. அவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான '**தொகை நுண்கணிதம்**' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **322** ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை **357** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை ; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பாகம் I

பக்கம்

1. தொகையிடல்—எளிய முறைகள் ... 1

தொகையிடல் (Integration)—வரையறைக் குட்படாத தொகை (Indefinite Integral)—மாறிலி C-பொது விதிகள்—மாறிலிகளின் மதிப்புக் காணுதல்—அடிப்படைத் தொகை யீடுகள் காணல்—பயிற்சிகள்

2. வடிவ கணிதத்தில் தொகையீட்டின் பயன்கள் ... 17

வடிவ கணிதத்தில் தொகையீட்டின் பயன்கள் (Application in Geometry)—பயிற்சிகள்—இயந்திர இயலில் தொகையீட்டின் பயன்கள் (Application in Mechanics)—பரப்பளவு காணல் (Application to areas) (Definite Integral) பயிற்சிகள் உருளைப் பருமம் காணல் (Finding Volumes of revolution)—பயிற்சிகள்

3. தொகையீடு காணும் முறைகள் .. 26

அடிப்படை அமைப்புகள்-I — தொகையீடு காணும் முறைகள்—பிரதியிட்டுத் தொகை யீடு காணல் (Integration by Substitution) — அடிப்படை அமைப்புகள் —அதிபரவளைவுச் சார்புகள் — பயிற்சிகள் அடிப்படை அமைப்புகளின் தொகுப்பு (Irrational)

4. பகுதிகளாக்கித் தொகை காணும் வாய்பாட்டின் விரிவு ... 42

பகுதிகளாக்கித் தொகை காணும் வாய்பாட்டின் விரிவு (Integration by Parts)—அடிப்படை அமைப்புகள் — பயிற்சிகள்—பலவிதக் கணக்குகள்

பாகம் II

பக்கம்

5. தொகை காணும் முறைகள் ... 59

தொகை காணும் முறைகள் — அடிப்படை அமைப்புகள் — அளவுக்கிணங்கிய இயற்கணிதச் சார்புகளின் தொகை காணல்.

6. அளவுக்கிணங்காச் சார்புகளின் தொகை காணல் ... 91

அளவுக்கிணங்காச் சார்புகளின் தொகை காணல் கோணவிகிதச் சார்புகளும் அதன் படிகளும் (மீள்பார்வை)

7. கோணவிகிதச் சார்புகளை இயற்கணிதச் சார்புகளாக்கித் தொகை காணல் ... 118

8 பகுதிகளாக்கித் தொகை காணும் முறை ... 135

பகுதிகளாக்கித் தொகைகாணும் முறை—கோண கணிதக் குறிப்புகள்

9. வரையறுத்த தொகை ... 160

வரையறுத்த தொகை—ஒரு தொடர்க் கூட்டல் வரையறுத்த தொகைக்கும் வரையறைக் குட்படாத தொகைக்குமுள்ள தொடர்பு—வளை வரைக்குட்பட்ட பரப்பு—சிம்சன் விதி

10. வரையறுத்த தொகைகளின் பண்பாடுகள் ... 210

வரையறுத்த தொகைகளின் பண்பாடுகள்—வரையறைக்குட்பட்ட தொகை காணும் முறையில் விதிவிலக்கு.

11. உருளைப் பருமம் ... 226

உருளைப் பருமம் (Volume of Revolution)—வளைவரையின் நீளம்—உருளைப் பருமத்தின் புறப்பரப்பு

பக்கம்

12 புவிக்கவர்ச்சி மையம் ... 258

புவிக் கவர்ச்சி மையம்—சமதளப்பரப்பு—உருளைப்பருமம் — வளைவரை — புறப்பரப்பு அடர்த்தி மாறியானபோது நிறை மையம்—பாப்பசு தேற்றங்கள் (Theorems of Pappus)

13. நிலை நெம்புத்திறன் ... 290

14. அழுத்தமும் அழுத்த மையமும் ... 311

அழுத்தமும் அழுத்த மையமும்—விசையும் வேலையும் — தொடர் வட்டி விதி

பாகம் III

15. தகாத் தொகையீடுகள் ஒருங்குதல் ... 326

தகாத் தொகையீடுகள் ஒருங்குதல் (Convergence of Improper Integrals) ஒப்புமைத் தொகையீடுகள் (μ—சோதனை)

16. பீட்டா, காமா சார்புகள் ... 353

பீட்டா, காமா சார்புகள் (Beta and Gamma Functions)—பீட்டா சார்புகளின் பண்புகள் காமா சார்பின் பண்புகள்—பீட்டா, காமா சார்புகளையொட்டிய பயிற்சிகள்

17 பன்மாறித் தொகையீடுகள் ... 401

பன்மாறித் தொகையீடுகள் (Multiple Integrals) பன்முறைத் தொகையீடுகள் (Repeated Integrals)—இருமாறித் தொகையீடு—வடிவ கணித விளக்கம்—பரப்பளவு காணல்—பு.க. மையம்—நிலை நெம்புத்திறன் துருவ ஆய எண்களில் பரப்பு (Area in polar Co-ordinates)—பு. க. மையம்—நி. நெ. தி. (C. G. and M. I.) உருளைப் பருமம் காணல் தெக்காட்டின் ஆயத் தொலைவுகள். வளைபரப்பின் கீழ்ப் பருமம் காணல்

பக்கம்

18. வளைவுத் தளங்களின் பரப்பளவுகள் ... 458

வளைவுத்தளங்களின் பரப்பு காணல் (Area of curved surfaces)—உருளை ஆய தூரங்களில் புறப்பரப்பு—மும்மாறித் தொகையீடுகள்—பருமம் காணல்—கோள ஆய எண்களின் பருமம் — பு. க. மையம்—நி.நெ.தி. குத்தாயத் தேற்றம்—இணை ஆயத் தேற்றம்

19. பன்மாறித் தொகையீடுகள் (தொடர்ச்சி) ... 485

பன்மாறித் தொகையீடுகள் (தொடர்ச்சி) எல்லைக் கட்டுப்பாடு — தொகையீட்டு வரிசை மாற்றம் (Change of order of Integration)—பன்மாறித் தொகையீட்டில் அமைப்பு மாற்றம் (Transformation of Multiple Integrals)—சார்புத் துணைக் கோவை (Jacobians) — பன்மாறித் தொகையீட்டில் சார்பு துணைக் கோவையின் பயன்

விடைகள் ... 507

Bibliography ... 541

கலைச்சொற்கள் ... 542

பாகம் I

1. தொகையிடல் – எளிய முறைகள்

§ 1. விளக்கம்

வகைப்படுத்தல் (Differentiation) என்பது x-ன் ஒரு சார்பு மாறும் வீதம் அல்லது வகைக்கெழு காணும் முறையாகும். நுண் கணிதம் பயன்படும் பல துறைகளில் பல இடங்களில் வகைப் படுத்தலுக்கு எதிர் மாறுன முறையைக் கையாள வேண்டியுள்ளது. சார்பு மாறும் வீதம், அல்லது வகைக்கெழு பிறிதொரு சார்பாகக் கொடுக்கப்பட்டு, அதனின்று முதற்சார்பு (Primitive) காண வேண்டி வரும். கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுவினின்று அதன் முதற்சார்பு காணும் முறையே தொகையீட்டு முறையாகும் (Integration). **முதற்சார்பும் தொகையீடும் ஒன்றே.** அதன் $\frac{dy}{dx}$ என்ற y என்ற ஒரு தொகையை (Integral) வகைக்கெழுவின் தலைகீழ் மாற்றம் (Inverse) என்றோ, அல்லது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தொடரின் (Series) கூடுதலென்றோ பொருள் கூறலாம். முதலில் கூறிய தலைகீழ் மாற்றம் என்ற பொருள் கூறுவதே சிறந்தது; இதனுல் எளிய முறையில் சார்புகளின் தொகைகள் காண இயலும். எனினும், கூட்டுதல் (Summation) என்ற பொருளே நுண் கணிதம் பயன்படுமிடங்களில் பலனளிக்கிறது. எனவே, இவ்விரு பொருள்களுக்குமுள்ள தொடர்பைக் கண்டறிவது இன்றியமையாத தாகும்.

§ 2. தொகையின் வரையறை (Definition):

x-ஐ ஒட்டிய $f(x)$ என்ற சார்பை வகைக் கெழுவாகப் பெறும் பிறிதொரு சார்பே $f(x)$-ன் தொகையெனப்படும். இத் தொகையை $\int f(x)\, dx$ என்கிறோம்.

$F(x) = \int f(x)\, dx$ என்று சமப்படுத்தி $F(x)$-ஐ தொகைக் குரிய சார்பு (Integral) என்றும் $f(x)$-ஐ தொகுக்கப்படும் சார்பு

(Integrand) என்றும் வழங்குகிரேம். பொதுப்பட, $\frac{d}{dx}F(x)$-ஐ $F'(x)$ எனக் குறித்தால், $\int F'(x)\,dx = F(x)$ எனலாம்.

Sum என்ற சொல்லின் முதலெழுத்தான S மேலும் கீழுமாக நீண்டு $\int$ என்ற வடிவம் பெற்றுத் தொகையீட்டுக் குறியீடாயிற்று. இங்கு dx என்பது $f(x)$ என்ற சார்பு x என்ற மாறியை யொட்டித் தொகுக்கப்படுகிறது என்று பொருள் கொள்ளவேண்டும். வகைக் கெழுவின் தலைகீழ் மாற்றமாகத் தொகை காண எடுத்துக் காட்டு.

x^3-ன் வகைக்கெழு x-ஐ ஒட்டி $= 3x^2$

$$\therefore \int 3x^2 dx = x^3$$

$\tan x$-ன் வகைக்கெழு x-ஐ ஒட்டி $= \sec^2 x$

$$\therefore \int \sec^2 x\,dx = \tan x.$$

தலைகீழ் மாற்ற முறையில் (Inverse) ஒரு சார்பின் தொகையீடு காண ஒரு பொதுப்பட்ட திட்டமில்லை. வகைக்கெழு வாய்பாடு களை (Formulae) நன்கு கற்றுத் தேர்தல் முதன்மையானதாகும். இவ்வாய்பாடுகளைக் கொண்டு தொகையீடு காணும் அடிப்படை அமைப்புகளை (Standard Forms) வகுத்துக் கொள்ளவேண்டும். தொகையீடு காணவேண்டிய கோவைகளை இவ் வடிப்படை அமைப்புகளுக்கு ஏற்றவாறு மாற்றியமைக்கவேண்டும். சரிவர மாற்றியமைக்க-பிரதியிடும் முறைகள், இயல் கணிதம், கோண கணிதம் இவற்றின் வாய்பாடுகள், வெகுவாகப் பயன்படுத்தப் படும்.

இங்குக் கவனிக்கத்தக்கது $\sqrt{1-x^3}$, $\sqrt{\sin x}$, $\frac{\cos x}{x}$ போன்ற பல எளிய சார்புகளுக்குங் கூடத் தொகையிடல் அரிதென்பதே.

§ 3 தொகையிடும்போது தோன்றும் மாறிலி (Arbitrary constant of Integration)

தலைகீழ் மாற்ற (Inverse) முறையில் கிடைக்கும் தொகை தனித் தன்மையுள்ளதல்ல (Not unique). C என்ற மாறிலியின் வகைக் கெழு பூச்சியமாவதால் $f^1(x)$-ன் தொகை $f(x) + C$ எனவும் கூறலாம். இங்கு C என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலியாகும். $f(x)$ என்பது வரையறைக்கு உட்படாத தொகை (Indefinite Integral) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\int 3x^2\, dx = x^3 + C;\ \int \sec^2 x \cdot dx = \tan x + C.$$

பயிற்சி : $F_1(x)$, $F_2(x)$ என்ற இரு சார்புகளின் வகைக் கெழுக்கள் $f(x)$ என்ருல், முதலிரு சார்புகளும் ஒரு மாறிலியில் வேறுபடும் என நிறுவுக.

$$F_1(x) - F_2(x) = \phi(x) \text{ என்றும் } \quad \cdots \quad (1)$$

(a, b) இடைவெளியில் $\phi(x)$ தொடர்ச்சியானது என்றும் கொள்வோம்.

இடை மதிப்புத் தேற்றத்தின்படி (Mean Value Theorem),

$$\frac{\phi(a) - \phi(x)}{x - a} = \phi'(x_1), \quad a < x_1 < x \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\text{ஆனுல் } \phi'(x) = \frac{d}{dx}[F_1(x) - F_2(x)]$$

$$= \frac{d}{dx}[F_1(x)] - \frac{d}{dx}[F_2(x)]$$

$$= f(x) - f(x) = 0. \text{ கொள்கைப்படி}$$

$$\therefore \quad \phi'(x_1) = 0$$

$$\therefore \quad \phi(x) - \phi(a) = (x - a) \times 0 = 0 \cdots\cdots (2) \text{ லிருந்து}$$

$$\therefore \quad \phi(x) = \phi(a)$$

அதாவது, $F_1(x) - F_2(x) = \phi(a) = C =$ ஒரு மாறிலி (1) லிருந்து

தொகையில் தோன்றும் மாறிலியின் மதிப்பு :

தொகை காணும் போது C என்ற மாறிலி சேர்க்கப்படாமல் தொக்கி நிற்பது மரபு. எனினும் கணக்கீடுகளில் மாறிலி C முதன்மையாக வருவதால் அது மறைந்து நிற்பதை மறவா திருத்தல் வேண்டும்.

ஒரு சார்புக்கும் அதன் தொகைக்கும் குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் தொகையில் தோன்றும் மாறிலியும் ஒரு குறிப்பிட்டதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\frac{dy}{dx} = 2x - 2$ என்றும், $x = 2$ எனும் மதிப்பிற்கு $y = 3$ ஆகிறது என்றும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள போது y-ஐ x-ன் சார்பாகக் காட்டுக.

$$\frac{dy}{dn} = 2x - 2$$

தொகையீடு முறைப்படி

$$y = \int (2x - 2)\, dx$$

$$= x^2 - 2x + C; \quad C\text{-தொகையில் தோன்றும் மாறிலி.}$$

$x = 2, y = 3$ என்று பிரதியிட

$3 = 4 \;\; - 4 + C \quad \therefore \quad C = 3$, குறிப்பிட்ட மாறிலி.

எனவே, $y = x^2 - 2x + 3$ என்பது தொகையின் சார்பாகும்.

தொகையில் தோன்றும் மாறிலியின் வடிவ கணித (Geometric) விளக்கம்.

மேலே கொடுத்த எடுத்துக்காட்டில் வகைக் கெழு $2x - 2$, அதற்குரிய தொகை அல்லது முதற்சார்பு $x^2 - 2x + C$.

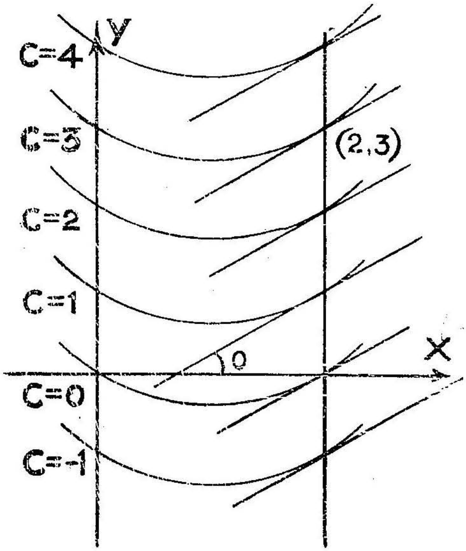
இங்கு $2x - 2$ என்பது முதற்சார்பு. $x^2 - 2x + C$-ன் வகைக் கெழு $\frac{dy}{dx}$. அதாவது $y = x^2 - 2x + C$ என்ற பரவளைவின் சாய்வு (slope) ஏதாவதொரு புள்ளியில் $2x - 2$ என்பதாகும்.

மாறிலி C-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குப் பரவளைவுகள் வரைவோம்.

எடுத்துக்காட்டில் $x = 2$ என இருக்கும்போது பரவளைவுகளின் சரிவு (slope) $\frac{dy}{dx} = 2{\cdot}2 - 2 = 2$; $x = 2$ என்பது Y- அச்சுக்கு இணையான கோடு.

இக்கோடு பரவளைவுகளை வெட்டும் புள்ளிகளில் தொடு கோடுகள் வரைந்தால், அவை $\tan \theta = 2$ என்ற சாய்வுள்ள இணை கோடுகளாகும்.

படத்தில் $x = 2$ எனக்கொண்டு $y = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ என்ற மதிப்புகளுக்குப் பரவளைவுகள் வரையப்பட்டுள்ளன.



படம் 1.

$y = x^2 - 2x + C$-ல் $x = 2$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$y = 4 - 4 + C, \quad \therefore \quad y = C$ ஆகும்.

ஆதலால் இப்பரவளைவுகள் $C = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ என்ற மதிப்புகள் ஏற்றவை.

எனவே, எடுத்துக்காட்டில் கண்ட தொகைச் சார்பு $y = x^2 - 2x + 3$, படத்தில் வரையப்பட்ட பல பரவளைவுகளில் (2, 3) என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியாகச் செல்லும் பரவளை வாகும்.

அறிதல் : $x^2 - 2x + C$ என்ற தொகைச் சார்பு கணக்கற்ற, சமமாகவும், ஒன்றுக்கொன்று இணையாகவும் வரைந்த பரவளைவு களைக் காட்டுமென்றும் C-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய பரவளைவுகள் ஏதேனுமொரு குத்தாயத்தை வெட்டும் இடை வெளியின் தூரமானது, உரிய மாறிலிகளின் மதிப்புகளின் வித்தியாசமென்றும், எல்லாப் பரவளைவுகளும் நேர் நிலையான புள்ளிகளில் (corresponding points) $2x - 2$ என்ற ஒரே வகைக் கெழு அல்லது சாய்வு (slope) கொண்டதென்றும் அறிகிறோம்.

§ 4. அடிப்படைத் தொகையீடுகள் (Standard Primitives) :

x^n-ன் தொகையீடு காணல் : இது திட்ட அமைப்புகளில் மிக முக்கியமானது. இங்குக் காணவேண்டியது எந்த x-ன் சார்பு, வகையீட்டு முறையில் x^n என்ற வகைக் கெழுவைக் கொடுக்குமென்பதே.

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = (n+1)\,x^n$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}(n+1)\,x^n = x^n$$

$$\therefore \text{ தலைகீழ் மாற்றப்படி, } \int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{— (1)}$$

குறிப்பு :

(i) அடிப்படைத் தொகையீடு (1) அளவுக்கிணங்கிய (rational) எல்லா n-ன் மதிப்புகளுக்கும் (— 1 தவிர) பொருந்தும்.

(ii) $n = -1$ எனில் $x^n = x^{-1} = \frac{1}{x}$

ஆனல், $\log_e x$-ன் வகைக் கெழு $\frac{1}{x}$ என அறிவோம்.

$$\therefore \int \frac{1}{x}\, dx = \log_e x$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $\int dx = \int 1 \cdot dx = \int x^0 \cdot dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} = x$

2. $\int x^9 \cdot dx = \frac{x^{9+1}}{9+1} = \frac{x^{10}}{10}$

3. $\int \sqrt[3]{x}\; dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4}\, x^{\frac{4}{3}}$

4. $\int \frac{1}{x^5}\, dx = \int x^{-5}\, dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{-x^{-4}}{4}$

$$= \frac{-1}{4x^4}$$

5. $\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}$

$= 3x$

§ **5.** (*a*) **தொகை காணும்போது கையாளப்படும் பொது விதிகள்:**

விதி 1: குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள சார்புகளின் கூடுதலின் வகைக்கெழு, அச்சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களின் கூடுதலென்பதறிவோம். இது போலவே

குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள சார்புகளின் கூடுதலின் தொகையீடு, அச்சார்புகளின் தொகையீடுகளின் கூடுதலென்பது தெளிவு.

விதி 2: $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$ எனக் குறிப்போம்.

$\frac{d}{dx}[af(x)] = af'(x)$, a ஒரு மாறிலி.

$$\therefore \int a f'(x)\, dx = a f(x) = a \int f'(x) \cdot dx$$

தொகுபடும் சார்பைப் பெருக்கும் ஒரு மாறிலி தொகையீட்டுக் குறிக்கு வெளியிலிருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்:

1. $\int (5x^4 - 3x^2 + 1)\, dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 3\frac{x^3}{3} + x + C$

$= x^5 - x^3 + x + C$

2. $\int (ax^3 + bx^2 + Cx + d)\, dx$

$= a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx + C$

3. $\int (2x^2 - 1)^3\, dx = \int (8x^6 - 12x^4 + 6x^2 - 1)\, dx$

$= \frac{8x^7}{7} - \frac{12x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} - x + C$

$= \frac{8}{7}x^7 - \frac{12}{5}x^5 + 2x^3 - x + C$

4. $$\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}})\, dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \tfrac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

5. $$\int \frac{(1+x)^3}{x^5}\, dx = \int \left(\frac{1 + 3x + 3x^2 + x^3}{x^5}\right) dx$$

$$= \int (x^{-5} + 3x^{-4} + 3x^{-3} + x^{-2})\, dx$$

$$= \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + 3\,\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 3\,\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C.$$

$$= -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^3} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + C.$$

பயிற்சிகள் 1 (*a*)

பின்வருவனவற்றை x-ன் சார்பாகத் தொகையிடுக.

1. x^7, $35x^6$, $\frac{1}{x^8}$, $\frac{15}{x^6}$, $x^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$

2. $12x^3 - 3x^2 + 6x + 3$

3. $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^{11}}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\sqrt{x^3}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[4]{x^5}$, $\sqrt[5]{x^3}$

4. $x^{\frac{1}{n}}$, $\frac{1}{x^n}$, $\frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$, $x^{\frac{p}{q}}$

5. $14x^6 - 15x^4 + 6x^2 + 1$

6. $x^7 + 5x^5 + 3x^3 + 2x - 5$

7. $(10 - 12x^3 + 3x^4 - x^6) / x^5$

8. $px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t.$

9. $a + bx + cx^2 + dx^3) / x^5$

10. $(2 - 5x)^2$; $(1 - x^3)^2$

11. $(a - x)^3$; $(a + x^2)^3$

12. $\frac{(2x - 3)^2}{x^3}$; $\left(\frac{3x^2 - 2}{x}\right)^2$

13. $\frac{px^2 + qx + r}{x^n}$; $\frac{x^m - x^n}{x^l}$

14. $\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^3$; $\left(3 + \frac{1}{x^3}\right)^3$

15. $\frac{(ax + b)(cx + d)}{\sqrt{x}}$; $\frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x}}$

பயிற்சிகள் 1 (*b*)

1. $\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 2x$ என்றும் $x = 2$ எனில் $y = 8$ என்றும் கொண்டு y-ஐ x-ன் சார்பாகக் காட்டுக.

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{6}{x^2}$ என்றும் $x = 1$ எனில் $y = 4$ என்றும் கொண்டு y-ஐ x-ன் சார்பாக்குக.

3. $\frac{dy}{dx} = \sin x$, $x = \frac{\pi}{3}$ என்ற மதிப்பிற்கு $y = 2$ ஆனல், y-ஐ x-ன் சார்பாகக் காண்க.

4. ஒரு வளை வரையின் (x, y) என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியில் அதன் சாய்வு (Slope) $3x - 4$ என்றுல் அதன் பொதுச் சமன் பாட்டை எழுதுக.

5. (x, y) என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியில் சாய்வு (slope) $2 - \frac{3}{x^2}$ கொண்ட வளைவரைகள் யாவை?

6. ஆதி $(0, 0)$ வழியாகச் செல்லும் ஒரு வளை வரையின் சாய்வு அதன் மேலுள்ள (x, y) என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியில் $x^2 + x$ என்றுல் அதன் சமன்பாடு காண்க.

7. $x^2 - x$-ஐச் சாய்வாகக் கொண்டு $(3, 1)$ என்னும் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் வளைவரை யாது ?

8. $(4, 5)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வளைவரையின் சாய்வு $\frac{1}{\sqrt{x}}$ எனில் அதன் சமன்பாடு என்ன ?

§ 5 (b) பொது விதிகள் (தொடர்ச்சி)

விதி 3. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq 1)$, இவ்வமைப்பில் x வருமிடத்து $x + b$ (b ஒரு மாறிலி) வந்தால் அமைப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் காண்போம்.

$f(x) = y$ எனக் கொண்டு $f(x)$-ன் வகைக் கெழுவை $\frac{dy}{dx}$ அல்லது $f'(x)$ என்கிறோம்.

அப்போது $\int f'(x)\, dx = f(x)$ ...(1)

இதில் x இருக்குமிடத்தில் $(x + b)$-ஐ இட்டு எழுத

$\int f'(x + b)\ d(x + b) = f(x + b)$ எனவாகும். ...(2)

ஆனால் $\frac{d(x + b)}{dx} = 1$, b ஒரு மாறிலி

இதை $d\,(x + b) = dx$ எனக் கூறலாம்.

(2)-ல் $d\,(x + b)$-ன் இடத்தில் dx-ஐ இட

$\int f'(x + b)\ dx = f(x + b)$ ஆகும். ...(3)

(1), (3) இவற்றின் தொகையீடுகளான $f(x)$, $f(x + b)$ என்ற அமைப்புகள் ஒன்றாக இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டாக :

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ என்ற அமைப்புப்படி}$$

$$\int (x + 1)^n\ dx = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$$

$$\int (x - 2)^n\ dx = \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}$$

$$\int (x + b)^n\ dx = \frac{(x+b)^{n+1}}{n+1} \text{ என அறியலாம்.}$$

x உடன் ஒரு மாறிலியைக் கூட்டியதால் திட்ட அமைப்பு மாருது.

விதி 4. x வருமிடத்து $(ax+b)$ $[a, b$ மாறிலிகள்$]$ வந்தால் அமைப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் காண்போம்.

$$\int f'(x)\, dx = f(x) \qquad \text{— (i)}$$

இதில் x வருமிடத்து $ax+b$-ஐ இடுவோம்.

$$\int f'(ax+b)\, d(ax+b) = f(ax+b) \text{ எனவாகும்.} \qquad \text{— (ii)}$$

ஆனல் $\frac{d}{dx}(ax+b) = a$, a-யும் b-யும் மாறிலிகள்

$$\therefore \quad d(ax+b) = a\,dx \text{ எனலாம்.}$$

இதை (ii) லிட $\int f'(ax+b)\, a\,dx = f(ax+b)$ எனவாகும்.

விதி 2-ன்படி, $a\int f'(ax+b)\, dx = f(ax+b)$

$$\therefore \int f'(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} f(ax+b) \text{ எனவாகும்.} \text{—(iii)}$$

(i), (iii) இவற்றில் $f(x)$-ம் $f(ax+b)$-ம் ஒரே அமைப்புள்ளன. ஆனல் (iii)-ல் உள்ள தொகையீடு x-ஐப் பெருக்கும் மாறிலி a யால் வகுக்கப்படுகிறது என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும்.

x-ஐ ஒரு மாறிலி பெருக்கினல் தொகையீட்டின் அமைப்பு மாறுவதில்லை. ஆனல் தொகையீடு அம் மாறிலியால் வகுக்கப் படுகிறது.

குறிப்பு : x இருக்குமிடத்து $ax+b$ போன்ற ஒருபடிச் சார்பைத் தவிர வேறுபடியில் $(x^2+1)^n$ அல்லது, $\sin^n x$, $\cos^n x$, $(1+\sin x)^n$ போன்ற சார்புகள் வந்தால், விதிகள் 3, 4 பயனளிக்கா.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(மேற்கண்ட விதிகளையும், கீழே கொடுத்துள்ள அடிப்படை அமைப்புகளையும் பயன்படுத்தித் தொகை காணும் பயிற்சிகள்)

அடிப்படைத் தொகையீடுகள் (Standard Primitives):

1. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
2. $\int \sin x\, dx = -\cos x$
3. $\int \cos x\, dx = \sin x$
4. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x$
5. $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x$

எ. கா.

(i) $\int x^4\, dx = \frac{x^5}{5} \quad \therefore \quad \int (x+2)^4 \cdot dx = \frac{1}{5}(x+2)^5$

$$\int (3x+2)^4\, dx = \frac{1}{5}(3x+2)^5 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{15}(3x+2)^5$$

$$\int (ax+b)^4\, dx = \frac{1}{5}(ax+b)^5 \times \frac{1}{a} = \frac{(ax+b)^5}{5a}$$

$$\int (a-2x)^4\, dx = \frac{1}{5}(a-2x)^5 \times \frac{1}{(-2)}$$

$$= \frac{-(a-2x)^5}{10}$$

(ii) $\int \cos x\, dx = \sin x \quad \therefore \quad \int \cos(x+\alpha)\, dx$

$$= \sin(x+\alpha)$$

$$\int \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{-1}$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$\int \cos ax\, dx = \sin ax \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\sin ax.$$

$$\int \cos \frac{1}{3}x \cdot dx = \sin \frac{1}{3}x \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \sin \frac{1}{3}x$$

$$\int \cos(ax+b)\, dx = \sin(ax+b)/a$$

$$= \frac{1}{a}\sin(ax+b)$$

(iii) $$\int \frac{1}{(3-2x)^4}\, dx = \int (3-2x)^{-4}\, dx$$
$$= \frac{\dfrac{(3-2x)^{-4+1}}{-4+1}}{-z}$$
$$= +\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(3-2x)^3}$$

(iv) $$\int \frac{1}{(4x-7)^{\frac{1}{3}}}\, dx = \int (4x-7)^{-\frac{1}{3}}\, dx$$
$$= \frac{\dfrac{(4x-7)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}}{4} = \frac{3}{8}(4x-7)^{\frac{2}{3}}$$

(v) $$\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int \sec^2 x\, dx - \int dx$$
$$= \tan x - x.$$

பயிற்சிகள் 1 (*c*)

தொகையீடு காண்க.

1. $\sqrt{1 + \sin 2x}$ 2. $\cot^2 x$

3. $(\tan x + \cot x^2)$ 4. $\dfrac{5 + 4\cos x}{\sin^2 x}$

5. $\dfrac{2 + \sin x}{\cos^4 x}$ 6. $\dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

7. $5\cos x - \dfrac{3}{x} + e^{-x}$ 8. $-\dfrac{2}{\sin^2 x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}$

9. $\dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$ 10. $\sqrt{1 - \cos 2x}$

குறிப்பு : சில இடங்களில் இரண்டாம் வகைக்கெழு கொடுத்து முதற்சார்பு அல்லது இரு முறை தொகை காண வேண்டி வரும். முதற்றொகையீட்டில் ஒரு மாறிலியும், 2-ம் தொகையீட்டில் பிறிதொன்றுமாக இரு மாறிலிகள் இறுதித் தொகையில் தோன்றும்.

§ 6 மாறிலிகளின் மதிப்பு காணுதல்.

எ. கா. 1.

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x$ எனக் கொடுத்துள்ளபோது y-ஐ x-ன் சார்பாகக் காட்டுக.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 12x^2 - 24x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \int (12x^2 - 24x) \cdot dx$$

$$= 12\frac{x^3}{3} - 24\frac{x^2}{2} + C$$

$$= 4x^3 - 12x^2 + C$$

$$\therefore \quad y = \int (4x^3 - 12x^2 + C)\, dx$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 12\frac{x^3}{3} + Cx + D$$

$$= x^4 - 4x^3 + Cx + D$$

இங்கு C, D மாறிலிகள்.

எ. கா. 2.

$\frac{d^2y}{dx^2} = (1-2x)^2$ என்றும் $x = 0$ அல்லது 1 என்னும் மதிப்புகள் பெறும்போது $y = 0$ என்றால் y-ஐ x-ன் சார்பாக்குக.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1-2x)^2 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \int (1-2x)^2 \cdot dx$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\,\frac{(1-2x)^3}{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{6}(1-2x)^3 + C$$

$$y = -\frac{1}{6}\int (1-2x)^3\, dx + \int C.\, dx$$

$$= -\frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \frac{(1-2x)^4}{-2} + Cx + D$$

$$= +\frac{1}{48}(1-2x)^4 + Cx + D$$

$y = \frac{1}{48}\cdot(1-2x)^4 + Cx + D$ என்ற சமன்பாட்டில்

$x = 0, y = 0$ என இட, $0 = \frac{1}{48}\cdot 1^4 + C\cdot 0 + D$

$$\therefore \quad D = -\frac{1}{48}$$

$x = 1, y = 0$ என இட, $0 = \frac{1}{48}(1-2)^4 + C\cdot 1 - \frac{1}{48}$

$D = -\frac{1}{48}$

$$= +\frac{1}{48} + C - \frac{1}{48}$$

$$\therefore \quad C = 0$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{48}(1-2x)^4 - \frac{1}{48}$$

பயிற்சிகள் 2

தொகையிடுக.

1. $x^3, (5+x)^3, (5-x)^3, (4x-3)^3, (ax+b)^3$
2. $x^n, (x-a)^n, (2x+3)^n, (5-2x)^n, (ax+b)^n, (C-dx)^n$
3. $\sin x, \cos 4x, \sin nx, \cos \frac{1}{4}x, \sin(ax+b),$

   $\sin(a-bx), \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$
4. $\sqrt{x}, \sqrt{1+x}, \sqrt{2-3x}, \sqrt{ax+b}, \sqrt{1+\frac{x}{a}},$ $\sqrt{ax}, \sqrt{a}x$
5. $\frac{1}{x^3}, \frac{1}{(5-2x)^3}, \frac{1}{(3x+1)^3}, \frac{1}{(p-qx)^3}, \frac{1}{(ax-b)^3}$

6. $\sec^2 x, \sec^2(x + \alpha), \sec^2 nx, \sec^2 \frac{x}{n}, \sec^2(ax + b)$

7. $\frac{1}{x^n}, \frac{1}{(2x - 3)^n}, \frac{1}{(3 - 2x)^n}, \frac{1}{(a - x)^n}, \frac{1}{(px - q)^n},$

8. $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(x - 1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(1 - x)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(2 - 5\ )^{\frac{3}{2}}},$

$\frac{1}{(px + q)^{\frac{3}{2}}}$ சார்பிலுள்ள மாறியையொட்டித் தொகை காண்க.

9. $(5y - 3)^5, \quad (a - bt)^{\frac{3}{2}}, (a + bz)^{\frac{1}{n}}$

10. $\frac{1}{(4 - 3t)^{\frac{1}{3}}}, \frac{1}{(1 - u)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(a - 3z)^3}$

11. $(p - t)^q, \frac{1}{(9 - 2u)^n} \frac{1}{(b - ny)^{\frac{1}{n}}}$

12. $\cos 3\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right), \cos(n\theta + \alpha)$

13. $\frac{dy}{dx} = 4(3 - x)^3$, $x = 3$ எனும் மதிப்பிற்கு $y = 0$ என்று கொடுத்துள்ள போது, $x = 2$ என்ற மதிப்பிற்கு y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

14. $\frac{d^2y}{dx^2} = 18(2 - 3x)^2$ என்ற போது y-ஐ x-ன் சார்பாகக் காண்க.

15. $\frac{d^2y}{dx^2} = 16 \cos 2x$, $x = 0$ அல்லது $\frac{\pi}{2}$ என்னும் மதிப்புகளுக்கும் $y = 0$ என்று கொடுத்துள்ளபோது y-ஐ x-ன் சார்பாகக் காண்க.

16. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(1 - x)^3}$, $x = 2$ மதிப்பிற்கு $y = 0 = \frac{dy}{dx}$ என்றால், y-ஐ x-ன் சார்பாக்குக.

2. வடிவ கணிதத்தில் தொகையீட்டின் பயன்கள்

§ **7.** வளைவரைச் சமன்பாடுகளை அவற்றின் வகைக்கெழு கண்டு வளைவரைகளின் பண்புகளை அறிகிறோம். அதுபோலவே தொகையீட்டு முறையில் கொடுக்கப்பட்ட பண்புகளிலிருந்து வளைவரைகளின் இனங்களை அறியக்கூடும்.

எ. கா. 1.

(i) எவ் வளைவரைகளில் ஏதாவதொரு புள்ளியில் அதன் சாய்வு அப்புள்ளியின் x அச்சு தூர வர்க்கத்திற்கு (Square) எதிர் விகிதத்திலிருக்கும்? அவற்றில் (4, 3); (2, 6) ஆகிய புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வளைவரை யாது?

$$\frac{dy}{dx} \propto \frac{1}{x^2},$$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{k}{x^2},$$ k ஒரு மாறிலி

தொகையிட $$y = \int \frac{k}{x^2}\,dx = k \int x^{-2}\,dx$$

$$= -\frac{k}{x} + C$$

$\therefore$ வளைவரைகளின் சமன்பாடு $y = -\dfrac{k}{x} + C$ ஆகும்.

$$xy = -k + Cx$$

அதாவது $x\,(y - C) = -k$ ......(i)

என்ற செவ்வக அதிபரவளைவுகளின் **சமன்பாடாகும்.** கொடுக்கப் பட்ட பண்பையுடைய வளைவரைகள் **அதி பர வளைவு** களாகுமென அறிகிறோம்.

மேலும், சமன்பாடு (i)-ல் $x = 4$ $y = 3$ என இட

$$4\,(3 - C) = -k$$

$$4C - k = 12 \qquad \ldots\ldots(ii)$$

$x = 2, y = 6$ என இட, $2\,(6 - C) = -k$

$$2C - k = 12 \qquad \ldots\ldots(iii)$$

(ii), (iii)-லிருந்து $C = 0,\ k = -12$ எனவாயிற்று.

$\therefore$ சமன்பாடு $xy = 12$

$\therefore$ கொடுத்துள்ள இரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் செவ்வக அதிபரவளைவு $xy = 12$

எ. கா. 2.

எவ் வளைவரைகளில் ஏதாவதொரு புள்ளியில் தொடுகோட்டடி (Sub-tangent), அப்புள்ளியை ஆதியுடன் இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வுக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும்?

ஏதாவதொரு புள்ளி $P\ (x, y)$ எனில்

$$OP\text{-யின் சாய்வு} = \frac{y}{x}$$

$$\text{தொடுகோட்டடி} = y \Big/ \frac{dy}{dx}$$

கொடுத்துள்ளது, $y \Big/ \dfrac{dy}{dx} = k \cdot \dfrac{y}{x}$, k ஒரு மாறிலி.

$$\text{அதாவது } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{k}$$

$$y = \int \frac{x}{k} dx = \frac{1}{k} \int x \cdot dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{x^2}{2} + C.$$

$$y = \frac{x^2}{2k} + C.$$

எனவே வேண்டிய வளைவரைகள் பரவளைவுகளாகும். அவற்றின் அச்சுகள் y ஆயத்தின் மேல் அமையும்.

எ. கா. 3.

ஒரு வளைவரையில் ஏதாவதொரு புள்ளியில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ அப் புள்ளியின் x அச்சு தூரத்தின் முப்படிக்கு எதிர்விகிதத்திலுள்ளது. அவ் வளைவரை (3, 2) என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்று $7x + y = 11$ என்ற நேர்கோட்டை (1, 4) என்ற புள்ளியில் தொடுமானல், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{k}{x^3}\, dx = -\frac{k}{2x^2} + C$$

$$\therefore \quad y = \int \left(-\frac{k}{2x^2} + C \right) dx$$

$$= \frac{k}{2x} + Cx + D$$

இந்தச் சமன்பாட்டில் $x = 3,\ y = 2$ என இட

$$2 = \frac{k}{6} + C \cdot 3 + D \quad i.e. \quad \frac{k}{6} + 3C + D = 2 \quad \text{...(i)}$$

$x = 1,\ y = 4$ என இட $\quad 4 = \frac{k}{2} + C + D \quad$ ...(ii)

(ii) — (i) $\quad \frac{k}{3} - 2C = 2;\ k - 6C = 6 \quad$ ...(iii)

(1, 4) என்ற புள்ளியில் வளைவரையின் சாய்வும் $7x + y = 11$ என்ற கோட்டின் சாய்வும் ஒன்றே.

(x, y)-ல் இவ் வளைவரையின் சாய்வு $\frac{dy}{dx} = -\frac{k}{2x^2} + C$

$\therefore$ (1, 4)-ல் வளைவரையின் சாய்வு

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k}{2 \cdot 1^2} + C = -\frac{k}{2} + C$$

$7x + y = 11$-ன் சாய்வு $= -7$

$$\therefore \quad -\frac{k}{2} + C = -7$$

$$-k + 2C = -14 \quad \text{...(iv)}$$

(iii) + (iv), $-4C = -8$; $C = 2$

(iv)-லிருந்து $K = 18$

(i)-லிருந்து $D = -7$

எனவே வளைவரை

$$y = \frac{9}{x} + 2x - 7$$

பயிற்சிகள் 3

1. சாய்வு x-அச்சு தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும் வளைவரைகள் யாவை ?

2. எவ்வளைவரைகளில் செங்கோட்டடி (Sub-normal) x-அச்சு தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது ?

3. எவ்வளைவரைகளில் சாய்வு x-அச்சு தூரத்தின் n-படிக்கு (power) நேர் விகிதத்திலுள்ளது ?

4. செங்கோட்டடி ஒரு மாறிலியாயுள்ள வளைவரைகள் யாவை ?

5. எவ்வளைவரைகளில் x-அச்சு, செங்கோட்டடி (sub-normal) இவற்றின் கூடுதல் ஒரு மாறிலியாகும் ?

6. எவ்வளைவரைகளில் x-அச்சு, செங்கோட்டடி இவற்றின் பெருக்குத்தொகை, குத்தாயத்தின் இருபடிக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும் ?

7. ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஒரு வளைவரையின் சாய்வு அப்புள்ளியை ஆதியோடு சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் சாய்வுக்கு எதிர் விகிதத்திலுள்ளது. அவ்வளைவரையின் பொதுச் சமன்பாடு என்ன ?

8. எந்தவளைவரைகளில் செங்கோட்டடி குத்தாயத்தின் இருபடிக்கு நேர் விகிதத்திலுள்ளது ?

9. (1, 6); (2, 10) என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வளைவரையின் சாய்வு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில், அதன் x-அச்சு தூரத்தின் இருபடிக்கு எதிர் விகிதத்திலுள்ளது. அவ்வளைவரை யாது ?

10. ஒரு வளைவரை $y = 2x + 1$ என்ற கோட்டை (2, 5) என்ற புள்ளியில் தொடுவதோடு (1, 4) என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லுகிறது. அதன் மேலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும்

$x^3 \dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஒரு மாறிலியாயின் வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. ஒரு வளைவரையின் சாய்வு, x-ன் ஒரு படிச்சார்பு. அது ஆதி வழியாகச் செல்வதோடு (2, 4) என்ற புள்ளியில் மீப்பெரு மதிப்பு (Maximum) உள்ளதெனில் அவ்வளைவரை யாது.

12. ஒரு வளைவரையின் $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, x-அச்சு தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்திலுள்ளது. அவ்வளைவரை (1, 0) வழியாகச் சென்று, $y = 2x - 1$ என்ற கோட்டை (2, 3)-ல் தொடுகிறதெனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

13. ஆதிப்புள்ளியில் மீச்சிறுமதிப்பும் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6 - 12x$ என்றுமுள்ள ஒரு வளைவரை (1, 1) என்ற புள்ளியில் மீப்பெரு மதிப்புள்ளது என நிறுவுக.

14. ஒரு வளைவரையில் $x^4 \left(\dfrac{d^2y}{dx^2} - 18 \right) = 192$. அது $(1, 0)$; $(-\frac{4}{3}, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் x-அச்சை வெட்டுகிறதெனில் அதன் சமன்பாடு யாது ?

§ 8. இயந்திர இயலில் (Mechanics) தொகையீட்டின் பயன்கள் :

ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலிருந்து ஒரு நகரும் புள்ளி t அலகு காலத்தில் சென்ற தூரம் s அலகுகளெனில், அப்புள்ளியின் திசைவேகம் (Velocity) $\dfrac{ds}{dt}$ என்றும், முடுக்கம் (Acceleration) $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ என்றும் அறிவோம். $\dfrac{ds}{dt} = v$ என்றும் $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} = v\dfrac{dv}{ds}$ என்றும் அறிவோம். s-ன் மதிப்பை t-ன் கோவையாகப் பெற்ற போது மேற்கண்ட வாய்பாடுகளைக் கொண்டு எக்கணத்திலும் திசைவேகத்தையும், முடுக்கத்தையும் கணக்கிடலாம்.

அதுபோலவே தொகையீடு முறையில் திசைவேகமோ அல்லது முடுக்கமோ, t, s கொண்ட சார்பாகக் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால், எக்கணத்திலும் முறையே சென்ற தூரத்தையும், செல்லும் திசைவேகத்தையும் கணக்கிடக் கூடும்.

எ. கா. 1

ஒரு நேர்கோட்டில் செல்லும் புள்ளியின் முடுக்கம் α எனும் மாறிலியெனின், t அலகு காலத்தில் அப்புள்ளியின் திசை வேகத்தையும் சென்ற தூரத்தையும் காண்க.

$t = 0$ எனும் போது $s = 0$, $v = u$ என்போம்.

1. கணக்கில் முடுக்கம்

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \alpha \quad \therefore \quad \frac{ds}{dt} = \alpha t + C, \ C \text{ ஒரு மாறிலி}$$

ஆனால் $t = 0$ என்றபோது $\dfrac{ds}{ot} = v = u$

$\therefore \quad u = \alpha \cdot 0 + C$ ie $C = u$

$\therefore \quad t$ காலத்தில் திசைவேகம், $v = u + \alpha t$ ... (i)

2. (i) $\dfrac{ds}{at} = u + \alpha t$ யிலிருந்து

$$s = ut + \alpha \frac{t^2}{2} + B, \ B \text{ ஒரு மாறிலி}$$

ஆனால் $t = 0$ என்றபோது $s = 0$

$\therefore \quad 0 = 0 + 0 + B$ ie $B = 0$

$\therefore \quad t$ காலத்தில் சென்ற தூரம்

$s = ut + \frac{1}{2} \alpha t^2$ ... (ii)

3. s தூரத்தில் வேகம் v காண

$\dfrac{d^2 s}{dt^2} = v \dfrac{dv}{ds}$ என்ற வாய்பாடு கொண்டு

$$v \frac{dv}{ds} = \alpha \therefore v\, du = \alpha\, ds$$

$$\therefore \int v\,dv = \int \alpha\, ds, \ \alpha \text{ ஒரு மாறிலி}$$
$$= \alpha \int ds$$

$$\therefore \frac{v^2}{2} = \alpha s + A, \ A \text{ ஒரு மாறிலி}$$

ஆனால் $s = 0$ என்றபோது $v = \frac{ds}{dt} = u$

$$\therefore \quad \frac{u^2}{2} = \alpha \cdot 0 + A \qquad ie\ A = \frac{u^2}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{v^2}{2} = \alpha \cdot s + \frac{u^2}{2}$$

$\therefore$ s தூரத்தில் வேகம், $v^2 = u^2 + 2\alpha s$ ... (iii)

$$v = u + \alpha t \qquad \text{... (i)}$$

$$s = ut + \tfrac{1}{2} \alpha t^2 \qquad \text{... (ii)}$$

$$u^2 = u^2 + 2 \alpha s \qquad \text{... (iii)}$$

இவை மூன்றும் சமமான முடுக்கத்துடன் ஒரு நேர் கோட்டில் செல்லும் ஒரு பொருளின் இயக்க சமன்பாடுகள். இவை இயக்கவியல் (Dynamics) வாய்பாடுகளாகும்.

எ. கா. 1.

ஒரு பொருள் நொடிக்கு 40 அடி வீதம் செங்குத்தாக மேலே எறியப்படுகிறது. புவிக்கவர்ச்சி தவிர பிறிதொரு கீழ்நோக்கி இழுப்புச் சக்தி அப்பொருளின் மேல் இயங்குகிறது. இவ் விழுப்புச் சக்தி பொருள் எறியப்பட்டதிலிருந்து காலம் t-க்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது. 1 நொடியின் முடிவில் அதனளவு 16 அடி நொடி நொடிக்கு, (feet per sec. per sec.) என்றால் அப்பொருள் எவ்வளவு உயரம் செல்லும் ?

பொருளின் மேல், கீழிழுப்பு சக்தி $= k\,t$ (k ஒரு மாறிலி). இங்கு $t = 1$ எனும்போது இழுப்பு சக்தி $= 16$

$$\therefore \quad 16 = k \cdot 1 \quad ie\ k = 16$$

புவிஈர்ப்பு சக்தி $= g$

மொத்த எதிர்ப்பு சக்தி $= g + 16\,t$

பொருளின் நிறை $= 1$ எனக் கொண்டால்

$F = m \cdot a$ என்ற வாய்பாட்டின்படி

$F = a.$

ஆகையால், சக்தி = முடுக்கம்

$$= \frac{d^2s}{dt^2} \text{ எனவாகும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -(g + kt) = -g - 16\,t = -32 - 16\,t$$

தொகைப்படுத்த, $\frac{ds}{dt} = v = -32\,t - 8\,t^2 + C$ (C ஒரு மாறிலி) (i)

கணக்கில் $t = 0$ எனும்போது $v = 40$

$\therefore \quad 40 = -0 - 0 + C \quad ie\ C = 40$

(i) $\frac{ds}{dt} = -32\,t - 8\,t^2 + 40$ எனவாகும்.

$\therefore \quad v = -32\,t - 8\,t^2 + 40.$

பொருள் மிகைஉயரம் சென்றபோது $v = 0$

$\therefore \quad 40 - 32t - 8t^2 = 0$

அதாவது, $t^2 + 4t - 5 = 0$ என்ற சமன்பாடுகிடைக்கும். இதற்குத் தீர்வுகாண, $(t + 5)(t - 1) = 0$

$\therefore \quad t = 1$ அல்லது $t = -5$

ஆதலால், நொடியில் பொருள் அதிகதூரம் சென்றிருக்கும். சென்ற தூரத்தைக் காண மறுமுறையும் தொகையீடு செய்தால்,

$$\frac{ds}{dt} = 40 - 32t - 8t^2$$

$$\therefore \quad s = 40t - 16t^2 - \frac{8}{3}\,t^3 + B, \text{ (}B\text{ ஒரு மாறிலி)}$$

ஆனல் $t = 0$ எனும்போது $s = 0$

$\therefore \quad 0 = 0 - 0 - 0 + B \qquad \therefore \quad B = 0$

அதாவது, $s = 40t - 16t^2 - \frac{8}{3}\,t^3$ எனவாகும். மிக அதிகதூரம் சென்றபோது $t = 1$ எனக் கண்டோம்.

$$\therefore \quad \text{மிக அதிகதூரம் } s = 40\cdot 1 - 16\cdot 1^2 - \frac{8}{3}\cdot 1^3$$

$$= 40 - 16 - 2\tfrac{2}{3} = 21\tfrac{1}{3} \text{ அடி.}$$

பயிற்சிகள் 4

1. ஒரு நகரும் புள்ளியின் முடுக்கம் புறப்பட்டு t நொடிகளுக்குப்பிறகு 18-2t அடி நொடி நொடிக்கு(feet per sec. per sec.)

என்றுள்ளது. அதன் தொடக்க வேகம் 20 அடி/நொடி என்றால் 3 நொடி முடிவில் அதன் வேகத்தையும் சென்ற தூரத்தையும் கணக்கிடுக.

2. u அடி/நொடி தொடக்க வேகமுள்ள ஒரு நகரும் புள்ளியின் முடுக்கம் $2 \cos \frac{\pi t}{6}$ அடி நொடி நொடிக்கு என்றால் 3 நொடியின் முடிவில் அதன் வேகத்தையும் சென்ற தூரத்தையும் காண்க.

3. 4 அடி/நொடி தொடக்க வேகமுள்ள ஒரு நகரும் புள்ளியின் முடுக்கம் $\sqrt{4+2t}$ அடி நொடி நொடிக்கு என்றால் 6 நொடியில் அது சென்ற தூரத்தையும் 16 நொடிக்குப் பிறகு அதன் வேகத்தையும் கணக்கிடுக.

4. 40 அடி/நொடி தொடக்க வேகமும் $(7 - 2s)$ அடி நொடி நொடிக்கு என்ற முடுக்கமுள்ள ஒரு நகரும் புள்ளி எவ்வளவு தூரம் செல்லும் ?

5. அசைவற்ற நிலையிலிருந்து நேர் கீழே விழும் ஒரு பொருளை புவிஈர்ப்பு கீழ்நோக்கியும், விழும் காலத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் மற்றொரு இயக்கம் மேல் நோக்கியும் இழுக்கின்றன. மற்றொரு இயக்கத்தின் முடுக்கம் 2 நொடிகளின் இறுதியில் 20 அடி நொடி நொடிக்கு என்றால், 6 நொடிகளின் இறுதியில் பொருளின் வேகத்தையும் விழுந்த தூரத்தையும் காண்க.

6. முன் கணக்கில் மேல் நோக்கி இழுக்கும் இயக்கம் பொருள் விழும் தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருப்பின், 5 அடி விழுந்தபோது அதன் முடுக்கம் 20 அடி நொடி நொடிக்கு என்று கொண்டு 15 அடி விழுந்தபோது பொருளின் வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

7. ஆதியிலிருந்து புறப்படும் ஒரு புள்ளியின் முடுக்கம் t காலத்தில் x, y அச்சுகளுக்கு இணையாக முறையே $6t$, 4 அடி நொடி நொடிக்கு எனவிருந்தால் அப்புள்ளி நகரும் பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. ஒரு நகரும் புள்ளியின் முடுக்கம் x, y அச்சுகளுக்கு இணையாக முறையே $-4 \sin 2t$ $-4 \cos 2t$ அடி நொடி நொடிக்கு என்றும், அப்புள்ளி $(2, 4)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து நொடிக்கு 2 அடி வேகம் வீதம் x-அச்சுக்கு இணையாகச் செல்கிறது என்றும் கொடுத்திருந்தால் அப்புள்ளி நகரும் பாதையின், சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. தொகையீடு காணும் முறைகள்

§ 9. பிரதியீட்டுத் தொகையீடு காணல் (Integration by Substitution) :

அடிப்படைத் தொகையீடுகளின் தொகுப்பு I

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq 1)$

2. $\int \frac{1}{x} \, dx = \log x$

3. $\int e^x \, dx = e^x$

4. $\int \sin x \, dx = -\cos x$

5. $\int \cos x \, dx = \sin x$

6. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x.$

பிரதியிடல் முறையில் இத்தொகையீடுகளைக் கொண்டு மேலும் சில சார்புகளின் தொகையீடுகளைக் காணலாம்.

பிரதியிடும் முறை (பொது)

$\int f(x) \, dx$ என்ற தொகையில் மாறி x-ஐ z-ஆக மாற்றும் முறையைக் காண்போம்.

$x = \phi(z)$ எனக் கொண்டால்,

$$\frac{dx}{dz} = \phi'(z), \quad \therefore \; dx = \phi'(z) \, dz \text{ எனலாம்.}$$

$\int f(x) \, dx$ என்ற தொகையில் இவற்றைப் பிரதியிட $\int f[\phi(z)] \, \phi'(z) \, dz$ எனவாகும்.

இங்குத் தொகுக்கப்படும் சார்பு z-ஐ ஒட்டியது.

குறிப்பு : 1. x-க்குப் பிரதியிட்டுக் கிடைக்கும் சார்பு, தெரிந்த அடிப்படைத் தொகையீடுகளிலொன்ருக இருக்கவேண்டும்.

2. வரையறைத் தொகையாயின் x-ன் கீழ்மேல் எல்லைகளைப் பிரதியிடும் மாறியின் ஏற்ற கீழ், மேல் எல்லைகளாக்க வேண்டும்.

எ. கா. 1.

$\int e^x \cdot dx = e^x$ என்ற அமைப்பிலிருந்து $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \log x$ எனக் காட்டுக.

$x = e^z$ எனில் $z = \log_e{}^x$. (இங்கு x மிகை மதிப்பு கொண்டது.)

$dx = e^z \,.\, dz.$

பிரதியிட $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \int \frac{1}{e^z} e^z \cdot dz = \int dz = z.$

$= \log_e x.$

எ. கா. 2.

$\int e^{ax} \cdot dx = \frac{e^x}{a}$ என்ற அமைப்பிலிருந்து

$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\log a}$ எனக் காட்டுக.

$a = e^c$ எனக்கொள்க. c ஒரு மாறிலி

$\therefore \quad c = \log_e a$

$a^x = (e^c)^x = e^{cn}$

$\therefore$ பிரதியிட $\int a^x \cdot dx = \int e^{cx} \cdot dx = \frac{e^{cx}}{c}$

$$= \frac{(e^c)^x}{e} = \frac{a^x}{\log_e a}$$

எ. கா. 3.

$\int \sec^2 x \; dx = \tan x$ என்பதிலிருந்து $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x$ எனக் காட்டுக.

$x = \frac{\pi}{2} -$ = என்க. $z = \frac{\pi}{2} - x$

$dx = -dz \quad \therefore \quad \text{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sec z$

$$\int \text{cosec}^2 x \cdot dx = \int \sec^2 z \cdot (-dz)$$
$$= -\int \sec^2 z \cdot dz = -\tan z$$
$$= -\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cot x.$$

எ. கா. 4.

$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x$ எனக் காட்டுக.

$$\int \sec x \cdot \tan x \cdot dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$$

$\cos x = z$ என்க.

$-\sin x \cdot dx = dz.$

$$\int \sec x \cdot \tan x \cdot dx = \int \frac{1}{z} \cdot \frac{(-dz)}{z} = \int \frac{-dz}{z^2}$$
$$= -\int z^{-2} \cdot dz = \frac{(-2^{-2+1}}{-2+1} = +\frac{1}{z}$$
$$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

எ. கா. 5.

$\int \text{cosec}\, x \cot x \, dx = -\text{cosec}\, z$ எனக் காட்டுக.

$$\int \text{cosec}\, x \cdot \cot x \, dx = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot dx$$

$\sin x = z$ என்க. $\cos x \cdot dx = dz.$

$$\therefore \int \text{cosec}\, x \cdot \cot x \cdot dx = \int \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{2} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}$$
$$= \frac{-1}{\sin x} = -\text{cosec}\, x.$$

எ. கா. 6.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$x = \sin\theta$ என்க. $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$,

$dx = \cos\theta \cdot d\theta$ ஆகும், $\theta = \sin^{-1} x$ ஆகும்.

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos\theta \cdot d\theta}{\cos\theta} = \int d\theta = \theta = \sin^{-1} x$$

எ.கா. 7.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$x = \tan\theta$ எனப் பிரதியிட $\theta = \tan^{-1}x$,

$dx = \sec^2\theta \, d\theta$ ஆகும்.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{1+\tan^2\theta} = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} \cdot d\theta$$

$$= \theta = \tan^{-1}x.$$

எ.கா. 8.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x$$

$$= -\operatorname{cosec}^{-1}x \text{ எனக்காட்டுக}$$

(i) $x = \sec$ எனில் $\theta = \sec^{-1}x$

$dx = \sec\theta \tan\theta \cdot d\theta.$

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec\theta \tan\theta \cdot d\theta}{\sec\theta \tan\theta}$$

$$= \int d\theta = \theta = \sec^{-1}x.$$

(ii) $x = \operatorname{cosec}\theta$ எனில் $\theta = \operatorname{cosec}^{-1}x$

$dx = -\operatorname{cosec}\theta \cdot \cot\theta \cdot d\theta.$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)} = \cot\theta$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\operatorname{cosec}\theta \cdot \cot\theta \cdot d\theta}{\operatorname{cosec}\theta \cdot \cot\theta}$$

$$= -\int d\theta = -\theta$$

$$= -\operatorname{cosec}^{-1} x.$$

எ.கா. 9

$\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ $(x^2 < a^2)$ மதிப்பிடுக.

$x = a \tanh\theta$ எனில் $\theta = \tanh^{-1}\frac{x}{a}$ $dx = a \cdot \operatorname{sech}^2\theta\, d\theta$

$a^2 - x^2 = a^2(1 - \tanh^2\theta) = a^2 \operatorname{sech}^2\theta$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \frac{a \operatorname{sech}^2\theta \cdot d\theta}{a^2 \operatorname{sech}^2\theta} = \int \frac{1}{a} \cdot d\theta = \frac{1}{a}\theta$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \tanh^{-1}\frac{x}{a}$$

எ.கா. 10

$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ $(x^2 > a^2)$ மதிப்பிடுக.

$x = a \coth\theta$ எனில் $dx = a \operatorname{cosech}^2\theta \cdot d\theta$

$x^2 - a^2 = a^2(\coth^2\theta - 1) = a^2 \operatorname{cosech}^2\theta$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{-a \operatorname{cosech}^2\theta}{a^2 \operatorname{cosech}^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{-1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta = \frac{-1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}$$

§ 10. அதிபரவளைச் சார்புகளின் தொகையீடுகள் (Hyperbolic Functions) :

(i) $(i = \sqrt{-1})$ என்ற கற்பனை (imaginary) மதிப்புடன் கோணவிகிதச் சார்புகளாக மாற்றியோ, அல்லது (ii) e^x-ன் சார்புகளாக மாற்றியோ தொகை காணலாம். இது ஒரு நல்ல பயிற்சியுமாகும்.

வரையறைப்படி

$$\cos(ix) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sin(ix) = i\sinh x = i\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tan(ix) = i\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

எ. கா. 1.

(i) $\int \cosh x\, dx = \int \cos(ix)\, dx$

$$= \frac{\sin(ix)}{i} = \frac{i\sinh x}{i} = \sinh x$$

(ii) $\int \cosh x\, dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

எ. கா. 2.

(i) $\int \sinh x\, dx = \int \frac{\sin(ix)}{i}\, dx$

$$= -\frac{1}{i}\,\frac{\cos ix}{i} = -\frac{1}{i^2}\cosh x$$

$$= +\cosh x$$

(ii) $\int \sinh x\, dn = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2}\, dx$

$$= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

எ. கா. 3.

$\int \operatorname{sech}^2 x = \int \sec^2(ix)\, dx$

$$= \frac{\tan ix}{i} = \frac{i\tanh x}{i} = \tanh x$$

எ. கா. 4.

$$\int \operatorname{cos}ec\,h^2\,x = \int i^2 \cos ec^2\,(ix)\,dx$$

$$= -i^2 \cdot \left[\frac{\cot\,(ix)}{i}\right]$$

$$= -i^2\,\frac{\cot h\,x}{i^2} = -\cot h\,x$$

எ. கா. 5.

$$\int \sec h\,x \cdot \tan h\,x \cdot dx$$

$$= \int \sec\,(ix) \cdot \frac{\tan\,(ix)}{i}\,dx = \frac{1}{i}\quad\frac{\sec\,(ix)}{i}$$

$$= -\sec h\,x$$

எ. கா. 6.

$$\int \operatorname{cosech} x \cdot \cot h\,x\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin h\,x} \cdot \frac{\cos h\,x}{\sin h\,x} \cdot dx$$

$\sin h\,x = z$ எனில் $\cos h\,x\,dx = dz$

$$\therefore \int \frac{\cosh x}{\sinh^2 x}\,dx = \int \frac{d_z}{z^2} = -\frac{1}{z}$$

$$= -\frac{1}{\sin h\,x} = -\operatorname{cosech} x$$

அடிப்படை அமைப்புகளின் தொகுப்பு II

(தொகை காணும்போது தோன்றும் மாறிலி C தொக்கியுள்ளது)

1. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq 1$
2. $\int dx = x$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log_e x.$
4. $\int e^x\,dx = e^x$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x$

7. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x$

8. $\int \operatorname{cosec}^2 x \; dx = -\cot x$

9. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x$

10. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x$

11. $\int \cosh x \, dx = \sinh x$

12. $\int \sinh x \, dx = \cos h\, x$

13. $\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tan h\, x$

14. $\int \operatorname{cosec} h^2 x \, dx = -\coth x$

15. $\int \sec h\, x \cdot \tan h\, x \, dx = -\operatorname{sech} x$

16. $\int \operatorname{cosech} x \cdot \coth x \, dx = -\operatorname{cosech} x$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1} x = -\cos^{-1} x$

18. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \sec^{-1} x$ அல்லது $-\operatorname{cosec}^{-1} x$

20. $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \tan h^{-1} x$

§. 13. பிரதியிடல் முறையில் மற்றும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்;

பொதுப்படையான விதி 1.

$\int f(x^n) n\, x^{n-1} dx \;\; u = x^n$ என்க.

$\therefore \quad \frac{du}{dx} = n\, x^{n-1}$; $du = n \cdot x^{n-1}\, dx$ எனவாகும்.

பிரதியிட $\int f(u) \cdot du$ எனவாகும்.

எ. கா. 1.

$\int (x^3 + 7)^2 \cdot x^2 \cdot dx$

$(x^2 + 7)^2 = u$ என்க. $\quad \therefore \quad 3x^2 \cdot dx = du.$

$\therefore \quad \int (x^3 + 7) \; x^2 \cdot dx = \int u^2 \cdot \frac{du}{3} \cdot = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{3}$

$= \frac{1}{9} (x^3 + 7)^3.$

எ. கா. 2.

$$\int x \cdot \sin \cdot x^2 \, dx$$

$x^2 = u$ என்க. $\quad \therefore \quad 2x \cdot dx = du.$

$$\int x \sin \; x^2 \cdot dx = \int \sin u \cdot \frac{du}{2} = -\frac{\cos u}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x^3.$$

பொதுப்படையான விதி 2.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx \qquad \ldots \text{(i)}$$

இங்கே $f(x) = u$ என்க.

$$\frac{d f[(x)]}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad f'(x) \cdot dx = du$$

(i)-ல் பிரதியிட

$$\therefore \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \int \frac{du}{u} = \log u$$

$$= \log f(x)$$

எ. கா. 3.

$$\int \frac{(3x^2 + 6x)}{x^3 + 3x^2 + 1} \cdot dx$$

பகுதி $x^3 + 3x^2 + 1 = u$ என்க.

$$\therefore \quad 3x^2 + 6x = \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad \int \frac{(3x^2 + 6x)}{x^3 + 3x^2 + 1} \cdot dx = \int \frac{1}{u} \, du = \log u$$

$$= \log (x^3 + 3x^2 + 1)$$

எ. கா. 4.

$$\int \frac{(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} \cdot dx.$$

பகுதி $e^x + e^{-x} = u$ என்க.

$$(e^x - e^{-x})\, dx = du$$

$$\therefore \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot dx = \int \frac{du}{u} = \log u$$

$$= \log (e^x + e^{-x})$$

பயிற்சிகள் 7

கீழ் வருவனவற்றில் அவற்றின் மாறியையொட்டித்தொகையீடு காண்க.

1. $2x \sqrt{x^2 + 1}$
2. $\sin^2\theta$
3. $\cos^3\theta$
4. $\sin 3x \cdot \cos 5x$
5. $\dfrac{e^{\tan^{-1}x}}{1 + x^2} \cdot dx$
6. $\dfrac{\sin x}{\cos^{n+1} x}$ $\quad n \neq 1$
7. $\dfrac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x}$ $(n \neq -1)$
8. $\dfrac{\sin^n x}{\sqrt{1 - x^2}}$
9. $\dfrac{\operatorname{cosec}^2\theta}{(a + b \cot\theta)^2}$
10. $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$ $\quad n \neq 1$
11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x}\, dx$
12. $\dfrac{1}{x \log x}$
13. $\dfrac{1 + \cos x}{x + \sin x}$

14. $x \cdot e^{-x^2}$

15. $a^{x^7} \cdot x^{7-1}$

16. $e^{(3a + b\cos\theta)} . \sin\theta$

17. $e^{(\cos^2\theta)} . \sin 2\theta$

18. $e^{\sin^2 x + \cos x}(\sin 2x - \sin x)$

19. $\dfrac{\cos 2x}{\cos x}$

20. $\dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}$

21. $\displaystyle\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx \quad (x^2 = a^2 \cos 2\theta)$

22. $\dfrac{e^x}{e^x - 1}$

23. $\dfrac{1}{(e^x + 1)(1 + e^{-x})}$

24. $\dfrac{e^x}{x/2}$

25. $\dfrac{e - 1}{\sqrt{e^x - 1}}$

பயிற்சிகள் 8

தொகையீடு காண்க :

1. $\dfrac{\sec(\log x) \cdot \tan(\log x)}{x}$

2. $\sec^2(3x + 2) + \cos 6x$

3. $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x$

4. $\cos x \cdot \sin 4x$

5. $\cos 2x \cdot \cos 3x$

6. $\sin mx \cdot \cos nx$

7. $\sin mx \cdot \sin nx$

8. $\sin^2 x \cdot \cos 3x$

9. $\cos^2 x \cdot \sin 4x$

10. $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$

11. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$

12. $\int \cos^2 x \cdot \cos 2x \cdot dx$

13. $\dfrac{\sec \theta}{(\sec \theta + \tan \theta)^n} \quad n \neq 0$

14. $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta \cdot d\theta}{(\sec \theta + \tan \theta)^n} \quad n > 1$

15. $\displaystyle\int \frac{\sec \theta \cdot \tan \theta \, d\theta}{(\sec \theta \cdot + \tan \theta)^k} \quad n > 1$

குறிப்பு: 13, 14, 15 கேள்விகளில் $u = \sec \theta + \tan \theta$ எனப் பிரதியிடவும்.

§ 12. அடிப்படை அமைப்புகளின் தொகுப்பு. III

1. $\int \tan x \cdot dx = \log \sec x.$

2. $\int \cot x \cdot dx = \log \sin x.$

3. $\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\log (\operatorname{cosec} x + \cot x)$

4. $\int \sec x \cdot dx = \log (\sec x + \tan x)$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$

அல்லது $\cos^{-1} \dfrac{x}{a}$

இவ்விரு தொகைகளின் வேறுபாடு $\dfrac{\pi}{2}$ என்ற மாறிலி

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2 a} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}.$

$$= -\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}.$$

இவ்விரு வகைகளின் வேறுபாடு π என்ற மாறிலி.

7. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin h^{-1} \frac{x}{a}$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cos h^{-1} \frac{x}{a}$$

9. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \log \frac{a + x}{a - x}$$

10. $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{(x - a)}{(x + a)}$$

குறிப்பு: அடிப்படை அமைப்புகள் 9, 10 இரண்டையும் பகுதிப் பின்ன முறையில் எளிதில் செய்யலாம்.

மேற்கண்டவற்றையெல்லாம் பிரதியிட்டும் செய்யலாம்.

எ. கா. 1. $$\int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$$

$\cos x = u$ எனில் $-\sin x \cdot dx = du$

$$\therefore \int \tan x \,.\, dx = \int -\frac{du}{u} = -\log u = \log u^{-1}$$

$$= \log \frac{1}{u} = \log \frac{1}{\cos x} = \log \sec x.$$

எ. கா. 2. $$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$\sin x = u$ எனில் $\cos x \cdot dx = du$

$$\therefore \int \cot x \cdot dx = \int \frac{du}{u} = \log u = \log \sin x.$$

எ. கா. 3.

$$\int \operatorname{cosec} x \cdot dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x \, (\operatorname{cosec} x + \cot x) \, dx}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)}$$

$\operatorname{cosec} x + \cot x = u$ எனில்

$(-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x - \operatorname{cosec}^2 x) \, dx = du$

$$\therefore \int \operatorname{cosec} x \cdot dx = \int \frac{(\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cdot \cot x)}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)} \cdot dx$$

$$= \int - \frac{du}{u} = -\log u$$

$$= -\log(\operatorname{cosec} x + \cot x)$$

$$\int \sec x \cdot dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}\, du$$

எ. கா. 4.

$\sec x + \tan x = u$ எனில்

$(\sec x \cdot \tan x + \sec^2 x)\; dx = d\, x$

$$\therefore \int \sec x \cdot dx = \int \frac{du}{u} = \log u$$

$$= \log(\sec x + \tan x)$$

எ. கா. 5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$x = a \sin\theta$ எனில் $dx = a\cos\theta \cdot d\theta.$

$\theta = \sin^{-1}\dfrac{x}{a},\; \sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2\theta}$

$$= a\cos\theta.$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{(a\cos\theta)}{a\cos\theta} \cdot d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

எ. கா. 6.

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$$

$x = a\tan\theta$ எனில் $\theta = \tan^{-1}\dfrac{x}{a}$

$dx = a\sec^2\theta \cdot d\theta$

$a^2 + x^2 = a^2(1 + \tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a^2\sec^2\theta \cdot d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \int \frac{d\theta}{a}$$

$$= \frac{\theta}{a} = \frac{1}{a}\cdot \tan^{-1}\frac{x}{a}$$

வாய்பாடுகள்

(i) $\cos h^2 \theta - \sin h^2 \theta = 1$

(ii) $\sin h^2 \theta + 1 = \cos h^2 \theta$

(iii) $\cos h^2 \theta - 1 = \sin h^2 \theta$.

எ. கா. 7.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad x = a \sinh \theta \text{ எனில்}$$

$$dx = a \cos h\, \theta \cdot d\theta$$

$$\theta = \sin h^{-1} \frac{x}{a},$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \sin h^2 \theta + a^2} = a \sqrt{\sin h^2 \theta + 1}$$

$$= a \cos h\, \theta.$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \cos h\, \theta \cdot d\theta}{a \cos h\, \theta}$$

$$= \int d\theta = \theta \sin h^{-1} \frac{x}{a}$$

எ. கா. 8.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad x = a \cos h\, \theta.$$

$$dx = a \sin h\, \theta\, d\theta.$$

$$\theta = \cos h^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 (\cos h^2 \theta - 1)} = a \sin h\, \theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sin h\, \theta \cdot d\theta}{a \sin h\, \theta} = \int d\theta$$

$$= \theta = \cos h^{-1} \frac{x}{a}$$

எ. கா. 9.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

எனக்காட்டுக.

$x = a \tan\theta$ எனில் $dx = a \sec^2\theta \cdot d\theta$

$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2\theta)} = a.\sec\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \sec^2\theta\, d\theta}{a \sec\theta} = \int \sec\theta \cdot d\theta$$

$$= \log(\tan\theta + \sec\theta)$$

$$= \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right)$$

$$= \log(x + \sqrt{a^2 + x^2}) - \log a$$

$$= \log(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

C ஒரு மாறிலி

எ. கா. 10.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$$

எனக் காட்டுக.

$x = a \sec\theta$ எனில் $dx = a \sec\theta \tan \cdot d\theta$ ஆகும்.

$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\sec^2\theta - 1} = a \tan\theta$.

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec\theta \cdot \tan\theta\, d\theta}{a \tan\theta}$$

$$= \int \sec\theta \cdot d\theta$$

$$= \log(\sec\theta + \tan\theta)$$

$$= \log\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$$

$$= \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \log a$$

$$= \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C,$$

C ஒரு மாறிலி.

4. பகுதிகளாக்கித் தொகை காணும் வாய்பாட்டின் விரிவு

பெர்னூலியின் வாய்பாடு (Bernouilli's Formula)

$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du'$ எனும் வாய்பாட்டிலிருந்து $\int uv \cdot dx$-ஐக் காண வாய்பாடு காண்போம்.

$$\frac{du}{dx} = u' \; ; \; \frac{du'}{dx} = u'' \ldots\ldots$$ எனவும்

$\int v\, dx = v_1 \; ; \int v_1\, dx = v_2$ எனவும் குறிப்போம்.

$$\begin{aligned}
\int uv \cdot dx &= \int u d\,(v_1) \\
&= u\, v_1 - \int v_1\, u'\, dx \\
&= u\, v_1 - \int u'\, dv_2 \\
&= u\, v_1 - u^{i}\, v_2 + \int v_2\, u^{ii}\, dx \\
&= u\, v_1 - u^{i}\, v_2 + u^{ii}\, v_3 - \int v_3\, u^{iii}\, dx \\
&= u\, v_1 - u^{i}\, v_2 + u^{ii}\, v_3 - u^{iii}\, v_4 + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

எனவாகும்.

குறிப்பு : தொகுக்கப்படும் சார்பில் x^n போன்ற காரணி இருப்பின் இதை u என்றும் மிகுந்ததை v என்றுங் கொண்டு எளிதில் தொகை காண இவ் வாய்பாடு உகந்தது.

எ. கா.

$$\int x^3\, e^{7x}\, dx$$

$x^3 = u$ எனில் $u^{i} = 3\, x^2 \; ; \; u^{ii} = 6x \; ; \; u^{iii} = 6$

$$u^{iv} = u^{v} = \ldots = 0$$

$v = e^{2x}$ எனில் $v_1 = \frac{e^{2x}}{2}$; $v_2 = \frac{e^{2x}}{4}$; $v_3 = \frac{e^{2x}}{8}$ ...

$$\therefore \int x^3 e^{2x} \cdot dx$$

$$= x^3 \frac{e^{2x}}{2} - 3x^2 \frac{e^{2x}}{4} + 6x \frac{e^{2x}}{8} - 6 \frac{e^{2x}}{16}$$

$$= e^{2x} \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8} \right)$$

§ 14 u, v என்பன x-ன் சார்புகளெனில் அவற்றின் பெருக்கற்பலனின் வகைக் கெழு

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

இரு பக்கங்களையும் தொகையிட

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} \cdot du + \int v \cdot \frac{du}{dx}\, dx$$ எனவாகும். இச் சமன்பாட்டில் கீழ்க்கண்டவாறு பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \quad \int u \cdot \frac{dv}{dx}\, dx = uv - \int v \cdot \frac{du}{dx}\, dx \qquad \text{...(i)}$$

$$u = f(x), \quad \frac{du}{dx} = f'(x)\,; \quad \frac{dv}{dx} = \phi(x); \quad v = \phi_1(x)$$

அப்பொழுது (i)

$$\int f(x) \cdot \phi(x) \cdot dx = f(x) \cdot \phi_1(x) - \int \phi_1(x) f'(x) \cdot dx \qquad \text{...(ii)}$$

இரு சார்புகளின் பெருக்கற்பலனின் தொகை = முதற்சாரையும் மற்றதின் தொகையையும் பெருக்கி வந்த பலன் — முதற் சார்பின் வகைக் கெழுவையும் மற்றதின் தொகையையும் பெருக்கி வந்த பலனின் தொகை.

(ii)-ஐச் சுருக்கமாக

$$\int f(x) \cdot d[\phi_1(x)] = f(x)\, \phi_1(x) - \int \phi_1(x) \cdot d[f(x)]$$

அல்லது $\int u\, dv = -uv - \int v \cdot du$ எனலாம்.

குறிப்பு : (i) v-யை யொட்டி u-ன் தொகை காண்பதைவிட, u-ஐ ஒட்டி v-ன் தொகை காண்பது எளிதாயின் இம்முறை பயன் தரும்.

(ii) தொகுக்கப்படும் சார்பிலுள்ள சினைகளில் ஒன்றை u-ஆகவும், மிகுந்ததை dv ஆகவும் கொள்ளவேண்டும். $\int v \cdot du$ தொகை காண எளிதாக விருக்குமாறு u-ஐத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

இவை பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகளில் தெளிவாகும்.

எ. கா. 1.

$$\int \log x \cdot dx$$

$$u = \log x. \quad \therefore \quad du = \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$dv = dx \qquad \therefore \quad v = x$$

$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$ வாய்பாட்டின்படி

$$\int (\log x)\, dx = (\log x)\, x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x \log x - \int dx$$

$$= x \log x - x$$

எ. கா. 2.

$$\int x^2 \log x \cdot dx = \int \log x\, d\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

இங்கு $u = \log x;\ v = \frac{x^3}{3}$

$$du = \frac{1}{x} \cdot dx;\ dv = x^2 \cdot dx.$$

$$\int \log x\, d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \log x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \cdot \log x - \frac{1}{3} \int x^2 \cdot dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot x^3 \log x - \frac{x^3}{9}$$

எ. கா. 3.

$$\int x \cdot \tan^{-1}x \cdot dx$$

$$= \int \tan^{-1}x \, d\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

இங்கு $u = \tan^{-1}x \quad \therefore \quad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

$dv = d\left(\frac{x^2}{2}\right) \; v = \frac{x^2}{2}$

$$\therefore \int \tan^{-1}x \cdot d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \tan^{-1}x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\left[\int \frac{x^2}{1+x^2} \cdot dx\right]$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \cdot dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\left[\int \frac{(1+x^2)}{1+x^2}dx - \int \frac{dx}{1+x^2}\right]$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

$$= \tfrac{1}{2}\tan^{-1}x\,(x^2+1) - \tfrac{1}{2}x$$

எ. கா. 4.

$$\int \tan^{-1}x \cdot dx$$

இங்கு $u = \tan^{-1}x \;\; du = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$

$v = x$

$$\therefore \int \tan^{-1}x \cdot dx = (\tan^{-1}x).\,x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

$$= x \cdot \tan^{-1}x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2)$$

எ. கா. 5.

$$= \int x \cdot \sin 2x \cdot dx$$

$$= \int x \cdot d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int x \cdot d(\cos 2x)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left[x \cdot \cos 2x - \int \cos 2x \cdot 1 \cdot dx\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left[x \cdot \cos 2x - \frac{\sin 2x}{2}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}x \cdot \cos 2x + \tfrac{1}{4}\sin 2x.$$

குறிப்பு : இங்கு x-ன் தொகை $\left(\frac{x^2}{2}\right)$ ஐ v-ஆகக் கொண்டிருந்தால் தொகை காணல் எளிதல்ல.

எ. கா. 6.

$$\int x(1-x)^n\, dx$$

இங்கு $u = x$ எனக்கொள்க. $du = 1 \cdot dx$

$$(1-x)^n\, dx = dv$$

$$\therefore \quad v = \int (1-x)^n \cdot dx = -\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\therefore \quad \int x(1-x)^n \cdot dx = \int x \cdot d\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$= -x\,\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)} - \int -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \cdot dx$$

$$= -x\,\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\,\frac{(1-x)^{n+2}}{(n+2)}$$

எ. கா. 7.

$$\int e^x \cdot x \cdot dx - \int x \cdot d(e^x)$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1 \cdot dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x = e^x(x-1)$$

எ. கா. 8.

(i) $\int_0^1 \sin^{-1} x \cdot dx$

இங்கு $u = \sin^{-1} x \quad \therefore \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

$v = x$

$$\int_0^1 \sin^{-1} x \cdot dx = \Big[x \cdot \sin^{-1} x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

$$= \Big[1 \sin^{-1} 1 - 0\Big] - \int_1^0 -\frac{du}{2\sqrt{u}},\ 1 - x^2 = u$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_1^0 u^{-\frac{1}{2}} \cdot du$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)_1^0$$

$$= \frac{\pi}{} + \left(\sqrt{u}\right)_1^0 = \frac{\pi}{2} + [\,0 - 1\,]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1.$$

(ii) பிரதியிடும் முறை

$I = \int_0^1 \sin^{-1} x \cdot dx$ என்ற தொகையில்

$x = \sin\theta$ என்க. $dx = \cos\theta \cdot d\theta$

கீழ் எல்லை $x = 0$ எனில் $\theta = 0$

மேல் எல்லை $x = 1$ எனில் $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cdot \cos\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cdot d(\sin\theta)$$

$$= [\theta \sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot 1 \cdot d\theta.$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\cos\theta \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + (0 - 1) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

எ. கா. 9.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \cdot \sec^2\theta \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \cdot d(\tan\theta) = \left(\theta \cdot \tan\theta\right)_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\theta \cdot 1 \cdot d\theta$$

$$= (\theta \cdot \tan\theta)_0^{\frac{\pi}{4}} - [\log\sec\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - (\log\sqrt{2} - \log 1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

எ. கா. 10.

$\int e^{ax} \cdot \cos bx \cdot dx = P$ என்க.

$\int e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx = Q$ என்க.

$$P = \int e^{ax} \cdot \cos bx \cdot dx = \int \cos bx \cdot d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cdot \cos bx - \int \frac{e^{ax}}{a}(-\sin bx \cdot b)\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \cdot e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} Q.$$

$$\therefore \quad aP - bQ = e^{ax} \cdot \cos bx \qquad \ldots \text{(i)}$$

$$Q = \int e^{ax} \sin bx \cdot dx$$

$$= \int \sin bx \,.\, d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \int \frac{e^{ax}}{a} \cos bx \cdot b dx$$

$$= \frac{1}{a} \cdot e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a} \cdot P$$

$$\therefore \quad bP + aQ = e^{ax} \cdot \sin bx \qquad \ldots \text{(ii)}$$

(ii) $\times\, b +$ (i) $\times\, a$, $(a^2 + b^2)\, P$

$$= e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\therefore \quad P = \int e^{ax} \cdot \cos bx \cdot dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos \cdot bx + b \sin bx)$$

(ii) $\times\, a -$ (i) $\times\, b$, $(a^2 + b^2)\, Q$

$$= e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\therefore \quad Q = \int e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$$

§ 15 அடிப்படை அமைப்புகள்—தொகுப்பு IV

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}$

2. $\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2}$

$$- \frac{a^2}{2} \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

3. $$\int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log (x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

மேற்கண்ட அமைப்புகளைப் பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடல் முறையில் காண்போம்.

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$

$u = \sqrt{a^2 - x^2}$ என்க. $du = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx$

$v = x$ $\qquad = -\frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{x \cdot (-x)\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2)\, dx}{a^2 - x^2}$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= x\sqrt{a^2 - \quad ^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\therefore \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

2. $\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx.$

$u = \sqrt{x^2 - a^2}$ $\quad \therefore\ du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$

$v = x$ $\qquad = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx$

$$\therefore \int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{(x^2 - a^2) + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$2\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$$

$$\therefore \int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} -$$

$$\frac{a^2}{2} \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$$

அல்லது $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C.$

3. $\int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot dx$ $\quad u = \sqrt{x^2 + a^2}$ என
$v = x$ ஆகும்.

$$du = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot dx$$

$$= \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\therefore \int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x \cdot \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot dx$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot dx +$$

$$a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$2\int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot dx = x\sqrt{(x^2 + a^2)} +$$

$$a^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\cdot\log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$$

அல்லது $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\sin h^{-1}\frac{x}{a} + C$

பகுதிகளாக்கித் தொகைகாண உதவும் அட்டவணை.

	தொகையீடு	u	dv
1	$\int x^n \log x\cdot dx$	$\log x$	$x^n dx$
2	$\int x^n \sin^{-1} x\cdot dx$	$\sin^{-1} x$	$x^n dx$
3	$\int x^n e^x\cdot dx$	x^n	$e^x dx$
4	$\int x^n \sin x\, dx$ அல்லது $\cos x$	x^n	$\sin x\, dx$ அல்லது $\cos x$
5	$\int e^x\cdot\sin x\cdot dx$ அல்லது $\cos x$	$\sin x$ அல்லது $\cos x$	$e^x\cdot dx$

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்

எ. கா. 1

$$\int x^2 \tan^{-1}x\, dx$$

$$= \int \tan^{-1}x\cdot d\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx.$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{1}{3}\int x \cdot dx + \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x^2}\, dx.$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(1+x^2)$$

எ. கா. 2.

$$\int \sec^3 x \cdot dx$$

$$= \int \sec x \cdot d(\tan x)$$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot dx.$$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int \tan^2 x \cdot \sec x \cdot dx.$$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \cdot \sec x \cdot dx.$$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx.$$

$$2\int \sec^3 x \cdot dx = \sec x \cdot \tan x + \log(\sec x + \tan x)$$

$$\therefore \int \sec^3 x \cdot dx = \frac{1}{2}\sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2}\log(\sec x + \tan x)$$

எ. கா. 3.

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} \cdot dx \quad \ldots I$$

$$= \int \sqrt{(x+1)^2 + 2^2} \cdot dx$$

$$a = 2, u = x + 1 \qquad \therefore \quad du = dx$$

திட்ட அமைப்புப்படி

$$I = \int \sqrt{u^2 + a^2} \cdot du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} +$$

$$\frac{a^2}{2}\log(u + \sqrt{u^2 + a^2}$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} \cdot dx = \frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 5} +$$

$$2 \log\left[(x+1) + \sqrt{x^2 + 2x + 5}\right]$$

எ. கா. 4

$$\int e^x (x+1) \log x \cdot dx$$

$$= \int e^x x \log x \cdot dx + \int e^x \log x \cdot dx.$$

$$= \int x \cdot \log x \cdot d(e^x) + \int e^x \log x \cdot dx.$$

$$= e^x x \log x - \int e^x \left(x + \frac{1}{x} + \log x \right) dx$$
$$+ \int e^x \log x \, dx.$$

$$= x\, e^x \log x - \int e^x \, dx - \int e^x \log x \cdot dx.$$
$$+ \int e^x \log x \, dx$$

$$= x \cdot e^x \log x - e^x.$$

எ. கா. 5

$$\int x^2 e^{3x} dx.$$

$$= \int x^2 \, d\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) = \frac{e^{3x}}{3} \cdot x^2 - \int \frac{e^{3x}}{3} 2x \cdot dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} . x^2 - \frac{2}{3} \int x \, d\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} . x^2 - \frac{2}{3} \left[x \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx. \right]$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} x^2 - \frac{2}{9} x \cdot e^{3x} + \frac{2}{9} e^{3x}$$

பயிற்சிகள் 9-A

தொகையிடுக :

1. $x^4 \log x$
2. $x^{\frac{1}{2}} \log x$
3. $x^n \log x$
4. $\dfrac{\log x}{x^2}$
5. $x \cdot \sin x$
6. $x \cdot \cos mx$
7. $x \cdot e^x$
8. $x \tan^{-1} x$
9. $x^3 \tan^{-1} x$
10. $x \cdot e^{-3x}$

11. $\cos^{-1}x$

12. $(x^3 + 1) \cdot \log x$

13. $x \sec^2 x$

14. $x \operatorname{cosec}^2 mx$

15. $x \sin^{-1} x$

16. $x \cos h\, x$

17. $x \sin h\, x$

18. $\sin h^{-1} x$

19. $x \tan^2 x$

20. $x(2x + 3)^n$

21. $x(a - x)^{\frac{5}{2}}$

22. $\dfrac{x}{(1 - x)^n}$

23. $(px + q)e^{ax+b}$

24. $\log(x^2 + a^2)$

25. $\dfrac{\log(a^2 + x^2)}{x^2}$

26. $\dfrac{x}{\sqrt{a + x}}$

பயிற்சிகள் 9-B

தொகை காண்க :

1. $\sqrt{32 + 2x^2}$

2. $\sqrt{x^2 + 2x + 10}$

3. $\sqrt{6 - 5x - x^2}$

4. $\sqrt{8 - 5x - 3x^2}$

5. $\sqrt{3x^2 + 4x - 7}$

6. $\sqrt{x(3x - 2)}$

7. $e^{2x} \cdot \sin 3x$

8. $e^{-ax} - \sin ax$

9. $e^{2x} \cdot \cos^2 x$

10. $e^{3x} \cdot \cos \dfrac{x}{2}$

11. $e^{2x} \cdot \sin 4x$

12. $\sin x \cosh x$

13. $\sin h 2x \cos 3x$

14. $\sin bx \cdot \sin h\, ax$

15. $e^{-\frac{Rt}{i}} \sin pt$

16. $x \cdot a^x$

17. $\dfrac{\log x}{x^3}$

18. $(x^3 + 1) \log x$

19. $\dfrac{1}{x} \log(\log x)$

20. $\dfrac{x \cdot e^x}{(1 + x)^2}$

21. $x^n (\log x)^2$

பலவிதக் கணக்குகள் (மீள்பார்வை)

பயிற்சிகள் 10

தொகையிடுக :

1. $(ax + b)^{\frac{5}{2}}$
2. $(3x - 2)^7$
3. $(3 - 2x)^{1/2}$
4. $\dfrac{1}{(5x + 2)^3}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{7x - 3}}$
6. $e^{\sin x} \cos x$
7. $\dfrac{\log_e x}{x}$
8. $\sqrt{e^x}$
9. $\sec 5x \cdot \tan 5x$
10. $\operatorname{cosec}^2 (2 - 5x)$
11. $\cos^2 \dfrac{3x}{2}$
12. $\sec^2 \dfrac{x}{2}$
13. $\sin 5x \cdot \cos x$
14. $\sin^3 2x$
15. $\sin^3 x \cdot \cos^3 x$
16. $\dfrac{x^2}{1 + x^6}$
17. $\dfrac{\sin (\tan^{-1} x)}{1 + x^2}$
18. $\dfrac{\sec^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x}$
19. $\dfrac{1}{\sqrt{16 - 9x^2}}$
20. $\dfrac{1}{16 + 9x^2}$
21. $\dfrac{1}{9x^2 - 16}$
22. $x^{p-1} \cdot \sin (x^p)$
23. $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^4}}$
24. $\dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}}$
25. $\dfrac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}$
26. $\dfrac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
27. $\dfrac{\sin x}{(a + b \cos x)^3}$
28. $\dfrac{1}{(1 + x^2) \tan^{-1} x}$
29. $\dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$
30. $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$
31. $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x}\right)^n \cdot \dfrac{1}{x^2}$
32. $\dfrac{\sin (\log x)}{x}$

33. $\sqrt{\tan x} \cdot \sec^2 x$

34. $\dfrac{e^{\sqrt{x}} \sin\left(e^{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}}$

35. $\int_0^1 \dfrac{dx}{(2 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$

36. $\sqrt{8 - 2x - x^2}$

37. $\sqrt{x^2 + 8x + 25}$

38. $x\sqrt{x^2 + ax}$

பயிற்சிகள் 11

தொகையீடுகளை மதிப்பிடுக :

1. $x^2 \sin x$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \cdot \cos x \cdot dx.$

3. $\int_0^1 \dfrac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$

4. $\int_0^1 \dfrac{x^3 \sin^{-1} x \cdot dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

5. $e^{8x} \cos 4x \cdot \cos x.$

6. $e^{3x} \cdot \cos 2x$

7. $\dfrac{x^2 \tan^{-1} x}{1 + x^2}$

8. $(\log x)^2$

9. $x \sin 3x$

10. $e^{mx} \sin^2 x.$

11. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \cdot dx$

12. $\cos^2 t.$

13. $\sin^3 \theta,$

14. $\dfrac{e^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2}$

15. $\dfrac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

16. $\dfrac{\cos x}{\sin^{n+1} x}$

17. $\dfrac{\sec^2 \theta}{(a + b \tan \theta)^2}$

18. $\sqrt{e^x - 1}$

19. $\cos 2x \cdot \cos 3x.$

20. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x.$

21. $x^n \cdot \log x$.

22. $x^2 e^{3x}$.

23. $\dfrac{x}{1+\sin x}$

24. $e^x \cdot x^3$.

25. $\dfrac{x \cdot e^x}{(x+1)^2}$

26. $e^{\sin x} \sin x \cos x$

27. $\int_0^\infty e^{-x^2} x^3 \, dx$.

28. $x^2 \sin 3x$.

29. $x^2 \sin^2 x$.

30. $\int_0^1 x^3 \tan^{-1} x \cdot dx$.

31. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin^{-1} \int x \cdot dx$.

32. $e^{3x} \cos 4x$

33. $e^x(\sin x + \cos x)$.

34. $\dfrac{e^n \tan^{-1} x}{(1+x^2)_3}$

5. தொகை காணும் முறைகள் (Methods of Integration)

§ 16. தொகை காணப்பயன்படும் பல அடிப்படை அமைப்புகளை முன்பகுதியில் கண்டோம். இப்பகுதியில் கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளை அடிப்படை அமைப்புகளுக்கு ஏற்றவாறு மாற்றியமைத்துத் தொகைகாணும் முறைகளை விரிவாக ஆராய்வோம்.

பொதுவாக, சார்புகளை இருவகைகளாகக் கூறலாம். 1. அளவுக்கிணங்கிய சார்புகள் (Rational Functions); 2. அளவுக்கிணங்காச் சார்புகள் (Irrational Functions).

$(ax+b)^n$, $\frac{x^2}{1+x^3}$, $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ போன்றவை அளவுக்கிணங்கியவை. $\sqrt{a^2+x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .... போன்றவை அளவுக்கிணங்காதவை.

இவ்விருவகைச் சார்புகளையும் அடிப்படை அமைப்புகளுக்கேற்றவாறு மாற்றக் கையாளப்படும் முறைகளாவன :

1. பிரதியிடல் அல்லது ஈடுசெய்யும் முறை (Method of Substitution.)

2. பகுதிபின்ன முறை (Method of Partial Fractions.)

3. பகுதிகளாக்கித் தொகைகாணும் முறை (Method of Integration by Parts.)

4. அடுக்குகளைத் தொடர்ந்து குறைக்கும் முறை (Method of Successive Reduction.)

முன்பகுதியில், ஈடுசெய்யும் முறையையும், பகுதிகளாக்கித் தொகைகாணும் முறையையுங் கொண்டு அடிப்படையமைத்துப்

பல எளிய பயிற்சிகளைச் செய்தோம். இங்கு மேற்சொன்ன நான்கு முறைகளும் சார்புகளை அடிப்படை அமைப்புகளுக்கு மாற்ற எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பதை விரிவாகக் காண்போம்.

§ 17. அடிப்படைகளின் தொகுப்பு (Primitive Forms).

1. $\int dx = x$

2. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq 1)$

3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \log x$ ... I

4. $\int e^x \cdot dx = e^x$

5. $\int \cos hx \, dx = \sin hx$

6. $\int \sin hx \, dx = \cos hx$ ... II

7. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x$

8. $\int \cos x \cdot dx = \sin x$

9. $\int \sec^2 x \cdot dx = \tan x$

10. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x$

11. $\int \sec x \cdot \tan x \cdot dx = \sec x$ ... III

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$

13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \tan h^{-1} \frac{x}{a}$ அல்லது $\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \cos h^{-1} \frac{x}{a}$ அல்லது $\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}$ ... (IV)

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin h^{-1} \frac{x}{a}$ அல்லது $\log (x + \sqrt{x^2 + a^2})$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a}$ அல்லது

$\log (x + \sqrt{x^2 - a^2})$ ... V

18. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}$

19. $\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2}$

$- \frac{a^2}{2} \log (x + \sqrt{x^2 - a^2})$

20. $\int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2}$

$+ \frac{a^2}{2} \log (x + \sqrt{x^2 + a^2})$ ... VI

§ 18. அளவுக்கிணங்கிய இயற்கணித சார்புகளின் தொகை காணல். (Integration of rational algebraical Function.)

I தொகுதியின் படியானது பகுதியின் படிக்குச்சமமாகவோ அல்லது அதைவிட அதிகமாகவோ இருப்பின், மீதியின் படியானது பகுதியின் படியை விடக் குறைவாக வருமாறு வகுத்துத் தொகைகாணவேண்டும்.

எ. கா.

(i) $\frac{x^3}{x - 3} = x^2 + 3x + 9 + \frac{27}{(x - 3)}$

$\therefore \int \frac{x^3}{x - 3} = \int \left(x^2 + 3x + 9 + \frac{27}{x - 3} \right) dx.$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2 + 9x + 27 \log (x - 3)$

(ii) $\frac{3x - 1}{3 - 2x} = - \left(\frac{3x - 1}{2x - 3} \right) = - \left[\frac{3}{2} + \frac{7}{2(2x - 3)} \right]$

$\therefore \int \frac{(3x - 1)\, dx}{(3 - 2x)} = - \int \left[\frac{3}{2} + \frac{7}{(2x - 3)} \right] dx$

$$= -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}\log(2x-3) \times \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}x - \frac{7}{4}\log(2x-3)$$

(iii) $$\int \frac{x(x-1)^2}{x^2+1} \cdot dx = \int \frac{(x^3 - 2x^2 + x)}{x^2+1} \cdot dx$$

$$= \int \left(x - \frac{2x^2}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int \left(x - 2 + \frac{2}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\tan^{-1}x.$$

பயிற்சிகள் 12

தொகையீடு காண்க :

1. $\dfrac{x}{x+2}$
2. $\dfrac{x^2}{x+2}$
3. $\dfrac{x^3}{x+2}$
4. $\dfrac{x}{3x-2}$
5. $\dfrac{x^2}{3x-2}$
6. $\dfrac{x}{1-3x}$
7. $\dfrac{x^2}{1-3x}$
8. $\dfrac{1-x}{1-3x}$
9. $\dfrac{x^2}{a-2x}$
10. $\dfrac{x^3}{2x+1}$
11. $\dfrac{x}{px+q}$
12. $\dfrac{x^2}{ax-b}$
13. $\dfrac{x^3}{a-2x}$
14. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$
15. $\dfrac{x^2+3}{x^2+9}$

II தொகுதி, பகுதியின் வகைக்கெழுவானால், தொகை பகுதியின் மடக்கை (logarithm) ஆகும்.

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx$ என்பதில் $u = f(x)$ என்க.

$$du = f'(x) \cdot dx.$$

$$\therefore \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \int \frac{du}{u} = \log u = \log [f(x)]$$

எ. கா. 1

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 2}\, dx$$

$u = x^3 + 2x - 2$ என்க. $du = (3x^2 + 2)dx$.

$$\therefore \quad \int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 2}\, dx = \int \frac{du}{u} = \log u$$

$$= \log (x^3 + 2x - 2)$$

குறிப்பு : இம்முறை அளவுக்கிணங்கிய (rational) சார்புகள் மட்டுமல்லாது மற்றசார்புகளிலும் பயன்படும்.

எ. கா. (i)

$$\int \frac{1}{1 + e^{-x}}\, dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot dx$$

$u = e^x + 1$ எனில், $du = e^x \cdot dx$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1 + e^{-x}}\, dx = \int \frac{du}{u} = \log u = \log (e^x + 1)$$

எ. கா. (ii)

$$\int \frac{\sin 2x}{a + b \cos^2 x} \cdot dx = \int \frac{(2 \sin x \cdot \cos x)}{a + b \cos^2 x}\, dx.$$

$\cos x = u$ எனில், $-\sin x \cdot dx = du$.

$$\therefore \quad \int \frac{\sin 2x}{a + b \cos^2 x} = \int \frac{(2 \sin x \cdot \cos x)}{a + b \cos^2 x}\, dx.$$

$$\mathrm{I} = -\int \frac{2u \cdot du}{a + bu^2}$$

$a + bu^2 = z$ எனில் $2\,bu \cdot du = dz$.

$$\therefore \frac{dz}{b} = 2u \cdot du.$$

$$\therefore \quad I = -\int \frac{dz}{bz} = -\frac{1}{b}\int \frac{dz}{z}$$

$$= -\frac{1}{b}\log z = -\frac{1}{b}\log(a + b\cos^2 x)$$

எ. கா. (iii)

$$\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\,dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$$

$$\int \frac{d(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)} = \log(\cos x + \sin x)$$

எ. கா.

(iv) $\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx \qquad u = x(x^2 + 3)$

$$= 3x^2 + 3x$$

$$du = 3x^2 + 3dx$$

$$= 3(x^2 + 1)\,dx$$

$$\therefore \int \frac{(x^2 + 1)dx}{x(x^2 + 3)} = \int \frac{du}{3u} = \frac{1}{3}\log u$$

$$= \frac{1}{3}\log [x(x^2 + 3)$$

பயிற்சிகள் 13

தொகையீடு காண்க :

1. $\frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5}$ 2. $\frac{2x^2}{x^3 - 1}$

3. $\frac{x^3}{a^4 - x^4}$ 4. $\frac{x +}{x^2 + 2x + 5}$

5. $\frac{2 - x^2}{x^2 - 6x + 7}$ 6. $\frac{ax^{n-1}}{b^n + x^n}$

7. $\tan ax$ 8. $\cot bx$

9. $\dfrac{\sin x \cdot \cos x}{1 + 3\sin^2 x}$ 10. $\dfrac{\cos x}{a + b \sin x}$

11. $\dfrac{e^{ax}}{1 - e^{ax}}$ 12. $\dfrac{\sec^2 x}{3 + 4 \tan x}$

13. $\dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ 14. $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

15. $\dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 16. $\dfrac{1}{\sin^{-1}x \cdot \sqrt{1-x^2}}$

III (*a*) பகுதியை ஒருபடி அல்லது இருபடிக் காரணிகளாகப் பிரிக்கக் கூடுமானால் பகுதிப் பின்ன முறையில் தொகையிடலாம்.

பகுதியின் காரணிகள் ஒரு படியாயும், வெவ்வேறாயும், $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ ...... என இருந்தால்,

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} \equiv \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\gamma)} + \ldots\ldots$$

என முற்றொருமையாக்கி மாறிலிகள் A, B, C-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு தொகையிடலாம்.

எ. கா. 1.

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx.$$

$$\frac{1}{(a^2 - x^2)} \equiv \frac{A}{(a-x)} + \frac{B}{(a+x)}$$

$$\therefore \quad 1 \equiv A(a+x) + B(a-x)$$

$x = a, -a$ என $\quad A = \dfrac{1}{2a}$, $B = \dfrac{1}{2a}$ ஆகும்.

$$\therefore \int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] dx.$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log(a+x) - \log(a-x)\right]$$

$$= \frac{1}{2a} \log \frac{(a+x)}{(a-x)}.$$

(அடிப்படை அமைப்பு 13)

எ. கா. 2.

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx.$$

$$\frac{1}{x^2 - a^2} \equiv \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x+a)}$$ என்க.

$$1 \equiv A(x+a) + B(x-a)$$

$x = a, -a$ எனயிட, $A = \dfrac{1}{2a}$, $B = \dfrac{-1}{2a}$ ஆகும்.

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] dx.$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left(\frac{x-a}{x+a} \right)$$

(அடிப்படை அமைப்பு 14)

எ. கா. 3.

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

பகுதி பின்னமாக்க $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$1 \equiv A(x-2) + B(x-1)$$

$x = 1$ எனில் $A = -1$

$x = 2$ எனில் $B = 1$

$$\therefore \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_3^4 \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx.$$

$$= \left[\log \left(\frac{x-2}{x-1} \right) \right]_3^4$$

$$= \log \frac{2}{3} - \log \frac{1}{2}$$

$$= \log \frac{4}{3}$$

எ. கா. 4.

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 4)}\, dx$$

பகுதி பின்னமாக்க

$$\frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 4)} = \frac{x^2 + 1}{x(x - 2)(x + 2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 2)} + \frac{C}{(x + 2)}$$

$$\therefore \quad x^2 + 1 \equiv A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2)$$

$x = 0$ என்றிட்டால் $1 = -4A \qquad \therefore A = -\frac{1}{4}$

$x = 2 \qquad ,, \qquad 5 = B \cdot 2 \cdot 4 \qquad \therefore B = \frac{5}{8}$

$x = -2 \qquad ,, \qquad 5 = C(-2)(-4) \qquad \therefore C = \frac{5}{8}$

$$\therefore \int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 4)}\, dx = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x}\, dx + \int \frac{\frac{5}{8}dx}{(x - 2)} + \int \frac{\frac{5}{8}dx}{(x + 2)}$$

$$= -\frac{1}{4} \log x + \frac{5}{8} \log (x - 2) + \frac{5}{8} \log (x + 2)$$

$$= -\frac{1}{4} \log x + \frac{5}{8} \log (x^2 - 4)$$

III (b) பகுதியில் ஒரு பன்முறைக் காரணி $(x - \alpha)^2$ இருப்பின் பகுதி பின்னங்கள் $\frac{A}{(x - \alpha)} + \frac{B}{(x - \alpha)^2}$ இவற்றைக் கூட்டி வந்த பின்னத்தில் தொகுதி ஒருபடியாயும் பகுதி இருபடியாயுமிருக்கும்.

எ. கா. 5.

$$\int \frac{(7x-2)\,dx}{(x-1)^2(x+2)}$$

பகுதி பின்னமாக்க

$$\frac{(7x-2)}{(x-1)^2(x+2)} \equiv \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)}$$

பகுதிகளை நீக்க

$$(7x-2) \equiv A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

$x = 1$ என்றிட, $\quad 5 = 3B \quad$ or $B = \frac{5}{3}$

$x = -2$ என்றிட $\quad -16 = 9C \quad C = -\frac{16}{9}$

$x = 0$ என்றிட $\quad -2 = A(-2) + B \cdot 2 + C \cdot 1$

$$= -A \cdot 2 + \frac{10}{3} - \frac{16}{9}$$

$$2A = 2 + \frac{14}{9} = \frac{32}{9} \qquad \therefore \quad A = \frac{16}{9}$$

$$\therefore \int \frac{7x-2}{(x-1)^2(x+2)}\,dx = \frac{16}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{(x+2)}$$

$$= \frac{16}{9}\log(x-1) - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{16}{9}\log(x+2)$$

$$= \frac{16}{9}\log\left(\frac{x-1}{x+2}\right) - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)}$$

குறிப்பு : பகுதியில் ஒரு பன்முறைக் காரணி $(x-\alpha)^3$ ஆனால் இதன் பகுதி பின்னங்கள் $\frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}$ ஆகும்.

III. (c) பகுதியில் மேலும் பிரிக்க முடியாத இருபடிக் காரணிகள் $x^2 + \alpha^2$ போன்றிருந்தால் இதன் பகுதி பின்னம் தொகுதியில் ஒருபடிக் கோவையுள்ள $\frac{Bx + C}{x^2 + \alpha^2}$ போன்றிருக்கும்.

எ. கா. 6.

$$\int \frac{5}{(1-x)(4+x^2)}\, dx$$

$$\frac{5}{(1-x)(4+x^2)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{Bx+C}{4+x^2} \text{ என்க.}$$

$$\begin{aligned} 5 &= A(4+x^2) + (Bx+C)(1-x) \\ &= (A-B)x^2 + (B-C)x + (4A+C) \end{aligned}$$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$$A - B = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$B - C = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$4A + C = 5 \qquad \text{(iii)}$$

(i) + (ii) + (iii), $5A = 5 \quad A = 1$

(i), (ii)-லிருந்து $B = C = A = 1$

$$\int \frac{5}{(1-x)(4+x)^2}\, dx = \int \frac{1}{1-x} \cdot dx + \int \frac{x+1}{4+x^2}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{1-x}\, dx + \int \frac{x \cdot dx}{4+x^2} + \int \frac{1}{4+x^2}\, dx.$$

$$= -\log(1-x) + \frac{1}{2}\log(4+x^2) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

எ. கா. 7

$$\int \frac{x}{x^3+1}\, dx$$

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2-x+1)}$$

$$x \equiv A \quad (x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$
$$\equiv Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$
$$\equiv x^2(A + B) + x(B + C - A) + (C + A)$$

குணகங்களைச் சமன்படுத்த

$$A + B = 0 \qquad (1)$$
$$B + C - A = 1 \qquad (2)$$
$$C + A = 0 \qquad (3)$$

இவற்றைத் தீர்க்க, $A = -\frac{1}{3}$, $B = C = \frac{1}{3}$

$$\therefore \int \frac{x}{x^3 + 1}\, dx = \int \frac{(-\frac{1}{3})\, dx}{x + 1} + \frac{1}{3} \int \frac{(x + 1)\, dx}{x^2 - x + 1}$$

$$= -\frac{1}{3}\log(x + 1) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \int \frac{[(2x - 1) + 3]\, dx}{x^2 - x + 1}$$

$$\int \frac{x \cdot dx}{x^3 + 1} = -\frac{1}{3}\log(x + 1) + \frac{1}{6}\int \frac{(2x - 1)\, dx}{x^2 - x + 1}$$
$$+ \frac{1}{6}\int \frac{3}{(x^2 - x + 1)}\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(x + 1) + \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1}$$
$$+ \frac{3}{6}\int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1}$$

$$= \frac{1}{3}\log(x + 1) + \frac{1}{6}\log(x^2 - x + 1)$$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + (\sqrt{\frac{3}{3}})^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\log(x + 1) + \frac{1}{6}\log(x^2 - x + 1)$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\log(x+1) + \frac{1}{6}\log(x^2 - x + 1)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

எ. கா. 8

$$\int_0^1 \frac{x \cdot dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$ என்க.

$$x \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$
$$\equiv Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$
$$\equiv x^2(A+B) + x(B+C) + (C+A)$$

குணகங்களைச் சமன்படுத்த.

$$A + B = 0 \qquad \text{......(1)}$$
$$B + C = 1 \qquad \text{......(2)}$$
$$C + A = 0 \qquad \text{......(3)}$$

தீர்க்க, $A = -\frac{1}{2}, B = C = \frac{1}{2}$

$$\therefore \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(x^2+1)} = \int_0^1 \frac{(-\frac{1}{2})}{(x+1)}dx$$

$$+ \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{(x^2+1)}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\log (x+1)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{2x\cdot dx}{x^2+1}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\left[\log (x^2+1)\right]_0^1$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\cdot\frac{x}{1}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\log 2$$

எ. கா. 9.

$$\int \frac{x^4+2x-8}{(1-x)^2(1+x^2)}$$

இங்கு பகுதி, தொகுதிகளில் x^4-ன் குணகம் ஒன்றே. ஆகவே தொகுதியைப் பகுதியால் வகுத்து வந்த ஈவும் ஒன்றாகும்.

$$\therefore \quad \frac{x^4+2x-8}{(1-x)^2(1+x^2)} \equiv 1 + \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2}$$

$$+ \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

எனப் பகுதி பின்னங்களாக்கலாம்.

$$x^4+2x-8 \equiv (1-x)^2(1+x)^2 + A(1-x)(1+x^2)$$
$$+ B(1+x) + (Cx+D)(1-x)^2$$

$$\equiv (1 - 2x + x^2)(1 + x^2) + A(1 - x + x^2 - x^3) + B(1 + x^2) + (Cx + D)(1 - 2x + x^2)$$

$$\equiv x^4 + (-2 - A + C)x^3 + (2 + A + B - 2C + 1)x^2 + (-2 - A = C - 2D)x + (A + B + D + 1)$$

குணகங்களைச் சமன்படுத்த

$$-2 - A + C = 0$$

$$2 + A + B - 2C + D = 0$$

$$-2 - A + C - 2D = 2$$

$$A + B + D + 1 = -8$$

மேலும் $x = 1$ எனயிட, $-5 + 2B \quad \therefore B = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ இப்போது குணகச் சமன்பாடுகள்

$$-A + C = 2 \qquad \text{(i)}$$

$$A - 2C + D = -2 - B = -\frac{9}{2} \qquad \text{(ii)}$$

$$-A + C - 2D = 4 \qquad \text{(iii)}$$

$$A + D = -8 - 1 - B = -\frac{23}{2} \qquad \text{(vi)}$$

(ii) — (iv), $-2C = +7 \quad \therefore C = -\frac{7}{2}$

(1) விருந்து $-A - \frac{7}{2} = 2 \quad \therefore \quad A = -\frac{11}{2}$

(v) விருந்து $-\frac{11}{2} + D = -\frac{23}{2} \quad \therefore \quad D = -6$

$$\therefore\ A = -\frac{11}{2};\ B = -\frac{5}{2};\ C = -\tfrac{7}{2};\ D = -6.$$

$$\int \frac{x^4 + 2x - 8}{(1-x)^2 (1+x^2)} \cdot dx = \int dx - \frac{11}{2}\int \frac{1}{1-x} \cdot dx$$

$$- \frac{5}{2}\int \frac{1}{(1-x)^2}\, dx + \int \frac{-\frac{7}{2}x - 6}{1+x^2}\, dx$$

$$= x + \frac{11}{2}\log(1-x) + \frac{5}{2}\frac{1}{(1-x)} - \frac{7}{2}\int \frac{x}{(1+x^2)}\, dx$$

$$- 6\int \frac{1}{(1+x^2)} \cdot dx$$

$$= x + \frac{11}{2}\log(1-x) + \frac{5}{2(1-x)} - \frac{7}{4}\log(1+x)^2$$

$$- 6\tan^{-1}x.$$

பயிற்சிகள் 14

தொகையீடு காண்க :

1. $\dfrac{x}{x^3 - 1}$

2. $\dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}$

3. $\dfrac{1}{x^2(a^2 + x^2)}$

4. $\dfrac{x}{(x-1)^2 (x+2)}$

5. $\dfrac{3x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

6. $\dfrac{4x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$

7. $\dfrac{2x + 1}{(x - 3)^2}$

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot dx}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)}$

9. $\dfrac{1 - 3x}{(1 + x^2 (1 + x)}$

10. $\dfrac{x + 1}{(x - 1)^2 (x + 2)^2}$

11. $\dfrac{3x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2 (x + 2)}$

12. $\dfrac{x^2}{(x - 1)(x - 2)}$

13. $\dfrac{(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)(2x + 1)}$

14. $\dfrac{x + 3}{(x - 1)(x - 2)^2}$

15. $\dfrac{x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$

16. $\dfrac{x^3}{(x - 1)(x - 2)}$

17. $\dfrac{x^8}{(x^2 + 1)(x^2 + 3x + 2)}$

18. $\dfrac{1}{\sin x + \sin 2x}$

19. $\dfrac{x^3 + 11x + 14}{(x + 3)(x^2 - 4)}$

20. $\displaystyle\int_0^2 \frac{(x^2 + 1)\, dx}{4x^3 + 12x + 7}$

21. $\dfrac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)}$

22. $\displaystyle\int \frac{4\, dx}{x^4 + x^2 + 11}$

23. $\displaystyle\int \frac{(x - 8)\, dx}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

24. $\displaystyle\int \frac{(x^5 + x^4 - 8)}{x^3 - 4x}\, dx.$

IV. பகுதி இருபடியாயும் அளவுக்கிணங்கிய காரணிகள் இல்லாமலும் $\frac{px+q}{ax^2+bx+c}$ என்ற வடிவிலிருந்தால்.

(i) $p = 0$ எனும் போது

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{(x-a)}{(x+a)}$$

என்ற அடிப்படை அமைப்புகளைக் கொண்டு தொகைகாணலாம்.

எ. கா. 1.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4^2}$$

$$= \int \frac{dx}{4^2+(x+2)^2}$$

$a = 4$ எனில் $u = x + 2$ என்க. $du = dx$.

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+4^2} = \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$$

$$= \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x+2}{4}$$

எ. கா. 2.

$$\int \frac{dx}{(4x^2+16x+25)} = \int \frac{dx}{4\left(x^2+4x+\frac{25}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+2)^2-4+\frac{25}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+2)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \tan^{-1} \frac{x+2}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x+4}{3}\right)$$

எ. கா. 3.

$$\int \frac{dx}{x^2+6x-4}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+6x-4} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-9-4}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+3)^2-(\sqrt{13})^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{13}} \log\left(\frac{x+3-\sqrt{13}}{x+3+\sqrt{13}}\right)$$

எ. கா. 4.

$$\int \frac{dx}{11-3x-2x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{11}{2}-\frac{3}{2}x-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{11}{2}-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{16}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{97}{16}-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{97}}{4}\right)^2 - \left(x + \frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{97}}{4}} \log \left\{ \frac{\frac{\sqrt{97}}{4} + \left(x + \frac{3}{4}\right)}{\frac{\sqrt{97}}{4} - \left(x + \frac{3}{4}\right)} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{97}} \cdot \log \cdot \frac{\sqrt{97} + 4x + 3}{\sqrt{97} - 4x - 3}$$

(ii) $p \neq 0$ எனும்போது

தொகுதியைப் பகுதியின் வகைக் கெழுவின் மடங்கும் ஒரு மாறிலியும் கொண்டதாகப்பிரித்து $\int \frac{1}{x} dx = \log x$ என்ற அமைப்பைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx$$

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

தொகுதி $(px + q)$ வை $A(2ax + b) + B$ என்ற அமைப்பில் எழுதி, A, B மாறிலிகளை மதிப்பிடவேண்டும்.

$$\text{தொகையீடு} = A \int \frac{(2ax + b)\, dx}{ax^2 + bx + c} + B \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

எனவாகும்.

$$= A \int \frac{du}{u} + \frac{B}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm K^2}$$

இங்கு, $u = ax^2 + bx + c$

$du = (2ax + b)\, dx$

$= A \log u + \frac{B}{a} \int \frac{dx}{X^2 \pm K^2}$ எனமாறும்.

குறிப்பு: தொகுதி இருபடியாகவோ, அதிகமாகவோ இருப்பின் வகுத்து வந்த ஈவைத் தனியாகவும் மீதியை மேற் கண்டவாறும் தொகையீடு செய்யவேண்டும்.

எ. கா. 1.

$$\int \frac{4x+5}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x+2) = 2x+2$$

$$\therefore\quad 4x+5 = 2(2x+2)+1$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2(2x+2)}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$= 2\int \frac{du}{u} + \int \frac{dx}{(x+1)^2+1^2} \qquad u = x^2+2x+2$$

$$= 2\log u + \tan^{-1}\frac{(x+1)}{1}$$

$$= 2\log(x^2+2x+2) + \tan^{-1}(x+1)$$

எ. கா. 2.

$$\int \frac{(3x-4)}{6x^2+4x-3}\,dx$$

$$\frac{d}{dx}(6x^2+4x-3) = 12x-4$$

தொகுதி $3x - 4 = \frac{1}{4}(12x-4) - 3$

$$\therefore\quad \int \frac{(3x-4)}{6x^2+4x-3}\cdot dx = \frac{1}{4}\int \frac{(12x-4)}{6x^2+4x-3}\,dx$$

$$- 3\int \frac{dx}{6x^2+4x-3}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} - \frac{3}{6}\int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}}$$

$$6x^2+4x-3 = u \quad dx$$

$$= \frac{1}{4}\log u - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\log(6x^2+4x-3) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{11}{18}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\log(6x^2+4x-3)$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{11}{18}}}\log\left\{\frac{x+\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{11}{18}}}{x+\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{11}{18}}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\log(6x^2+4x-3) -$$

$$\frac{\sqrt{18}}{4\sqrt{11}}\log\left\{\frac{3x+1-\sqrt{\frac{11}{2}}}{3x+1+\sqrt{\frac{11}{2}}}\right\}$$

எ. கா. 3.

$$\int \frac{2-7x}{5-x-x^2}\,dx$$

$$\frac{d}{dx}(5 = x - x^2) = -1 - 2x$$

$$\begin{aligned} 2 - 7x &= A(-1-2x) + B \\ &= (-A+B) - 2Ax \end{aligned}$$

குணகங்களைச் சமன்படுத்த,

$$-2A = -7 \qquad A = \frac{7}{2}$$

$$-A + B = 2 \qquad B = 2 + A = \frac{11}{2}$$

$$\therefore \int \frac{2-7x}{(5-x-x^2)}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{(-1-2x)}{5-x+x^2}\cdot dx$$

$$+\frac{11}{2}\int \frac{dx}{5-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{7}{2}\log(5-x-x^2)$$

$$+\frac{11}{2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{21}{2}}\right)^2-(x+\frac{1}{2})^2}$$

$$=\frac{7}{2}\log(5-x-x^2)+$$

$$\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{2\times\sqrt{\frac{21}{2}}}\log\frac{\frac{\sqrt{21}}{2}+x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{2}-x-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{7}{2}\log(5-x-x^2)+\frac{11}{2\sqrt{21}}\log\frac{(\sqrt{21}-2x+1)}{(\sqrt{21}-2x-1)}$$

எ. கா. 4.

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1+\frac{2x}{x^2-x+1} = 1+\frac{(2x-1)+1}{x^2-x+1}$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}$$

$$+\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= x+\log(x^2-x+1)+\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1}$$

$$= x + \log(x^2 - x + 1) + \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= x + \log(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \tan^{-1} \frac{(2x - \frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= x + \log(x^2 - x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right)$$

எ. கா. 5.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x \cos\theta + x^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(x + \cos\theta)^2 + 1 - \cos^2\theta}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(x + \cos\theta)^2 \sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \left[\tan^{-1}\left(\frac{x + \cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \left[\frac{1}{\sin\theta} \tan^{-1}\left(\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \left\{\tan^{-1}\left(\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}}\right) - \tan^{-1}(\cos\theta)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \left[\tan^{-1}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right) - \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\tan^{-1}\left(\tan\overline{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}+\theta\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\theta}{2}.$$

பயிற்சிகள் 15

தொகையிடு காண்க :

1. $\dfrac{1}{(x^2+2x+5)}$

2. $\dfrac{1}{3x^2-2x+1}$

3. $\dfrac{1}{x^2+3x+1}$

4. $\dfrac{1}{x^2-6x+5}$

5. $\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$

6. $\dfrac{1}{3x^2-2x+2}$

7. $\dfrac{6x-7}{3x^2-7x+11}$

8. $\dfrac{3x-2}{5x^2-3x-2}$

9. $\dfrac{3x-1}{x^2-x+1}$

10. $\dfrac{7x+1}{6x^2+x-1}$

11. $\dfrac{2x-1}{5x^2-x+2}$

12. $\dfrac{1}{2\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x}$

13. $\dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$

14. $\dfrac{1}{4-2x-x^2}$

15. $\dfrac{x}{6x-7-x^2}$

16. $\dfrac{4x+5}{x^2+2x+2}$

17. $\dfrac{4x-5}{x^2-2x-1}$

18. $\dfrac{3x-5}{2x^2+6x+1}$

19. $\dfrac{x^3}{2x^2+2x+41}$

20. $\dfrac{1}{e^x+3e^{-x}+2}$

19. V பகுதியைக் காரணிகளாக்கித் தொகைகாணும் முறையில் சில சிறப்பு வகைகள்.

(i) தொகுபடும் சார்பில் x^{n-1} ஒரு காரணியாயும் மற்றவை x^n-ன் சார்பாகவும் இருப்பின் பிரதியிட்டுத் தொகை காணலாம்.

எ. கா. 1.

$$\int \frac{dx}{x\,(x^n+1)}$$

$x^n = u$ எனில் $n \cdot x^{n-1}\, dx = du$

$$I = \int \frac{dx}{x\,(x^n+1)} = \int \frac{x^{n-1}\,.\,dx}{x^n\,(x^n+1)}$$

$$= \int \frac{du}{n \cdot u\,(u+1)} = \frac{1}{n}\int \frac{du}{u\,(u+1)}$$

$$\frac{1}{u\,(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$$

$$I = \frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= \frac{1}{n}\left(\log u - \log \overline{u+1}\right) = \frac{1}{n}\log\frac{u}{u+1}$$

$$= \frac{1}{n}\log\frac{x^n}{x^n+1}$$

எ. கா. 2

$$\int \frac{dx}{x\,(x^3+1)} = \int \frac{x^2\,dx}{x^3\,(x^3+1)}$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{x^3}{3}\right)}{x^3\,(x^3+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u\,(u+1)}\,;\ u = x^3.$$

$$= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= \frac{1}{3}\log\left(\frac{u}{u+1}\right) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{x^3}{x^3+1}\right)$$

எ. கா. 3

$$\int\frac{2x\cdot dx}{(x^2+1)(x^2+3)} \quad x^2 = u \text{ என்க.}$$

$$2x\cdot dx = du.$$

$$\therefore \int\frac{2x\cdot dx}{(x^2+1)(x^2+3)} = \int\frac{du}{(u+1)(u+3)}$$

$$= \int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{u+3}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{u+1}{u+3}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{x^2+3}$$

எ. கா. 4.

$$\int\frac{x^2dx}{x^6+2x^3+2} \quad x^3 = t \text{ என்க.}$$

$$3x^2\cdot dx = dt.$$

$$\int\frac{x^2dx}{x^6+2x^3+2} = \int\frac{dt}{3(t^2+2t+2)}$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^2+1^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}(t+1)$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3+1)$$

எ. கா. 5.

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx.$$

$$I = \int\frac{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{\frac{1}{x^2}+x^2}\cdot dx = \int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^2+2}$$

$$x - \frac{1}{x} = u \text{ என்க. } \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = du.$$

$$I = \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}. \frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tan^{-1}. \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right)$$

(ii) $x^2 + a^2$ **போன்ற காரணிகள் பகுதியில் வந்தால் பகுதி பின்னங்களாக்குதல் :**

எ. கா. 6.

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)}$$

$$\frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} \equiv \frac{A}{x^2 + a^2} + \frac{B}{x^2 + b^2} + \frac{C}{x^2 + c^2}$$

$$x^2 \equiv A(x^2 + b^2)(x^2 + c^2) + B(x^2 + a^2)(x^2 + c^2) + C(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)$$

$x^2 = -a^2$ எனில் $-a^2 = A(-a^2 + b^2)(-a^2 + c^2)$

$$\therefore A = \frac{-a^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}$$

அதுபோலவே

$$B = \frac{-b^2}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}$$

$$C = \frac{-c^2}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}$$

$$\therefore I = \sum \frac{-a}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \cdot \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

எ. கா. 7

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

$$\frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \equiv \frac{A}{(x^2 + 1)} + \frac{B}{(x^2 + 4)} \text{ என்போம்.}$$

$$x^2 \equiv A(x^2+4)+B(x^3+1)$$

$x^2 = -1$ எனில் $-1 = 3A \quad \therefore \quad A = -\frac{1}{3}$

$x^2 = -4$ எனில் $-4 = -3B \quad \therefore \quad B = \frac{4}{3}$

$$\therefore \int \frac{x^2 \cdot dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\tfrac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \tfrac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\tfrac{1}{3}\tan^{-1} x + \tfrac{4}{3} \times \tfrac{1}{2}\tan^{-1} \cdot \frac{x}{2}$$

$$= -\tfrac{1}{3}\tan^{-1} x + \tfrac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

(iii) $x^2 + a^2$ போன்ற அமைப்பு வருமிடத்து $x = a\tan\theta$ என ஈடுசெய்து தொகை காணலாம்.

எ. கா. 8

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$x = \tan\theta$ எனில் $dx = \sec^2\theta \cdot d\theta$,

$$1 + x^2 = \sec^2\theta.$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{\sec^2\theta \cdot d\theta}{(\sec^2\theta)^2} = \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$= \int \cos^2\theta \,.\, d\theta = \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta.$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

எ. கா. 9.

$$\int \frac{x^2\, dx}{(a^2+x^2)^2}$$

$x = a \tan\theta$ எனில் $a^2 + x^2 = a^2 \sec^2$

$dx = a \sec^2 \theta \cdot d\theta.$

$$\therefore \int \frac{x^2\, dx}{(a^2 + x^2)^2} = \int \frac{a^2 \tan^2 \theta \cdot a \sec^2 \theta \cdot d\theta}{(a^2 \sec^2 \theta)^2}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{a} \int \sin^2 \theta \cdot d\theta.$$

$$= \frac{1}{2a} \int 2 \sin^2 \theta \cdot d\theta = \frac{1}{2a} \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta.$$

$$= \frac{1}{4a} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{4a} \left[\tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \tan\theta}{1 + \tan^2 \theta} \right]$$

$$= \frac{1}{4a} \left\{ \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{\frac{x}{a}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{4a} \left[\tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{ax}{a^2 + a^2} \right]$$

எ. கா. 10

$$\int \frac{x \cdot dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \int \frac{x \cdot dx}{[(x + 1)^2 + 1]^2}$$

$x + 1 = \tan\theta$ எனில் $dx = \sec^2\theta \cdot d\theta.$

$$I = \int \frac{(\tan\theta - 1) \cdot \sec^2\theta\, d\theta}{(\tan^2\theta + 1)^2}$$

$$= \int \frac{(\tan\theta - 1) \sec^2\theta \cdot d\theta}{(\sec^2\theta)^2} = \int \frac{(\tan\theta - 1)}{\sec^2\theta} \cdot d\theta$$

$$= \int \frac{\tan\theta}{\sec^2} \cdot d\theta - \int \frac{1}{\sec^2\theta} \cdot d\theta.$$

$$= \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta - \int \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \int \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta - \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \cdot d\theta.$$

$$= \tfrac{1}{2} \int \sin 2\theta \cdot d\theta - \tfrac{1}{2} \int d\theta - \tfrac{1}{2} \int \cos 2\theta \cdot d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{2}\,\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} - \frac{1}{2}\,\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan\theta}{(1 + \tan^2\theta)}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{1 - (x+1)^2}{1 + (x+1)^2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x+1)$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{1 + (x+1)}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

$$- \frac{1}{2}\tan^{-1} x + 1$$

$$I = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x+1).$$

பயிற்சிகள் 16

தொகையீடு காண்க :

1. $\dfrac{1}{x\,(x^4 + 1)}$

2. $\dfrac{1}{x^2\,(a^2 + x^2)}$

3. $\dfrac{(x^2 + 1)\,(x^2 + 9)}{(x^2 + 4)\,(x^2 + 16)}$

4. $\dfrac{1}{x\,(2x^2 + 1)}$

5. $\int_0^a \frac{(a^2 - x^2)\,dx}{(a^2 + x^2)^2}$

6. $\frac{x^3}{2x^8 - x^4 - 1}$

7. $\frac{x^2}{(x^3 + 1)^3}$

8. $\frac{1}{(2x^2 + 3)(2x^2 + 5)}$

9. $\frac{1}{x(x^5 + 1)}$

10. $\frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2}$

11. $\frac{1}{x^2(1 + x^2)^2}$

12. $\frac{x_3}{(a^2 + x^2)^2}$

13. $\frac{x^4}{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}$

14. $\frac{x^5}{4 + 2x^4 - x^8}$

6. அளவுக்கிணங்கா (Irrational) சார்புகளின் தொகை காணல்

§ 21. அளவுக்கிணங்கா சார்புகளைப் பிரதியிடல் முறையில் அளவுக்கிணங்கிய சார்புகளாக்கி சில அடிப்படை அமைப்புகள் அமைத்தோம். அவையாவன :

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} \text{ அல்லது } \log (x + \sqrt{(x^2 - a^2)})$$

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} \text{ அல்லது } \log (x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

4. $$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

5. $$\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - a^2}$$

$$- \frac{a^2}{2} \log (x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

அல்லது $$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{2}} \cosh^{-1} \left(\frac{x}{a}\right)$$

6. $$\int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$+ \frac{a^2}{2} \log (x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

அல்லது

$$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{x}{a}\right)$$

எ. கா. 1

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$$

$$3x - x^2 - 2 = -2 - (x^2 - 3x)$$

$$= -2\,[(x - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{9}{4}]$$

$$= \tfrac{9}{4} - 2 - (x - \tfrac{3}{2})^2$$

$$= (\tfrac{1}{2})^2 - (x - \tfrac{3}{2})^2$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} = \sin^{-1}\left[\frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \sin^{-1}(2x - 3)$$

எ. கா. 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + x + 1)}} = \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sinh^{-1}\left[\frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \sin h^{-1} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$ அல்லது

$$\log\left[\frac{(x + \frac{1}{2}) + \sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right]$$

எ. கா. 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(3-2x)}}$$

$$x(3-2x) = 3x - 2x^2 = -2\left(x^2 - \tfrac{3}{2}x\right)$$

$$= -2\left[(x-\tfrac{3}{4})^2 - (\tfrac{3}{4})^2\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(3-2x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{3}{4})^2 - (x-\frac{3}{4})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1}\left(\frac{4x-3}{3}\right)$$

எ. கா. 4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x-2}}$$

$$3x^2 + x - 2 = 3\left[x^2 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right]$$

$$= 3\left[(x+\tfrac{1}{6})^2 - \tfrac{1}{36} - \tfrac{2}{3}\right]$$
$$= 3\left[(x+\tfrac{1}{6})^2 - \tfrac{25}{36}\right]$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x-2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{6})^2 - (\frac{5}{6})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh^{-1}\left(\frac{6x+1}{5}\right)$$

அல்லது $\log\left[\frac{(x+\frac{1}{6}+1)\sqrt{(x+\frac{1}{6})^2 - \frac{25}{36}}}{\frac{5}{6}}\right]$

II $\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$ **என்ற அமைப்பிலுள்ள சார்புகளின் தொகை காணும் முறை.**

தொகுதியைப் பகுதியின் மூலக்குறிக்குள்ளிருக்கும் சார்பின் வகைக் கெழுவின் மடங்காகவும் ஒரு மாறிலியாகவும் பிரித்துத் திட்ட அமைப்புகளுக்கு மாற்றலாம்.

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

$\therefore \quad px + q \equiv A\,(2ax + b) + B$ என்று முற்றொருமைப் படுத்தி A, B மதிப்புகளைக் காணவும்.

$$\text{தொகையீடு } I = \int \frac{(px+q)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$I = A\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + B\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$ax^2 + bx + c = u$ எனப் பிரதியிட

$(2ax + b)\;dx = du$ ஆகும்.

$$\therefore \quad I = A\int \frac{du}{\sqrt{u}} + B\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= A\cdot 2\sqrt{ax^2+bx+c} + B\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

இரண்டாவது உறுப்புக்குத் தொகையீடு முறையை முன்பே கண்டோம்.

எ: கா. 1.

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$$

$$\frac{d}{dx}(4x^2+4x+3) = (8x+4)$$

$$x + 3 \equiv A\,(8x+4) + B$$

$$\equiv 8Ax + (4A + B)$$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த, $8A = 1 \qquad \therefore \quad A = \frac{1}{8}$

$$4\cdot\tfrac{1}{8} + B = 3 \qquad \therefore \quad B = \tfrac{5}{2}$$

$$\therefore \int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \frac{1}{8}\int \frac{(8x+4)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$$

$$= \frac{1}{8} \times 2\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{4(x^2+x+\frac{3}{4})}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4}\cdot\log\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x+\frac{3}{4}}\right]$$

எ. கா. 2

$$\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$$

$$u = 3+66x-11x^2 \quad \therefore \quad du = (66-22x)\,dx$$
$$= 22\,(3-x)\,dx$$
$$= -22\,(x-3)\,dx$$

$$\therefore \int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}} = \int \frac{du}{-22\sqrt{u}} = -\frac{1}{22}\cdot 2\sqrt{u}$$

$$= -\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}$$

எ. கா. 3

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$$

$$u = 3+4x-4x^2 \quad \therefore \quad du = (4-8x)\,dx$$

$$x+3 \equiv A(4-8x)+B$$

$x = \frac{1}{2}$ என்றிட $3\frac{1}{2} = B \quad \therefore \quad B = \frac{7}{2}$

$$4A+B=3 \qquad \therefore \quad A = \frac{3-B}{4} = \frac{3-3\frac{1}{2}}{4}$$

$$A = -\tfrac{1}{8}$$

$$\therefore \int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}} = -\frac{1}{8}\int \frac{(4-8x)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$$

$$+\frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{3-4(x^2-x)}}$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{2}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{4\left[\frac{3}{4}-(x^2-x)\right]}}$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{3}{4})-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{1^2-(x-\frac{1}{2})^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\tfrac{7}{4}\sin^{-1}(x-\tfrac{1}{2})$$

எ. கா. 4

$$\int \sqrt{\frac{5-x}{x-2}}\cdot dx$$

தொகுதியில் அளவுக்கிணங்கிய சார்புவருமாறு தொகுதியையும் பகுதியையும் $\sqrt{5-x}$ ஆல் பெருக்க,

$$I = \int \frac{(5-x)\,dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}} = \int \frac{(5-x)\,dx}{\sqrt{-10+7x-x^2}}$$

$$u = -10 + 7x - x^2 \text{ என } du = (7 - 2x)\,dx$$

$$5 - x \equiv A(7 - 2x) + B = (7A + B) - 2Ax$$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த $\quad -2A = -1 \qquad \therefore \quad A = \frac{1}{2}$

$$+\tfrac{7}{2} + B = 5 \qquad \therefore \quad B = \tfrac{3}{2}$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int \frac{(7 - 2x)\,dx}{\sqrt{-10 + 7x - x^2}} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{-10 - (x - \frac{7}{2})^2 + \frac{49}{4}}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{-10 + 7x - x^2} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2 - (x - \frac{7}{2})^2}}$$

$$= \sqrt{-10 + 7x - x^2} + \frac{3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x - 7}{3}\right)$$

பயிற்சிகள் 17

தொகையீடு காண்க :

1. $\dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

2. $\dfrac{4x + 1}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}}$

3. $\dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{x(3x + 5}}$

6. $\dfrac{3x + 5}{\sqrt{x(2x - 1)}}$

7. $\dfrac{2x +}{\sqrt{4x^2 + 5x + 6}}$

8. $\dfrac{1}{\sqrt{2 + x - x^2}}$

9. $\sqrt{\dfrac{x - 1}{x - 2}}$

10 $\sqrt{\dfrac{3 - 2x}{1 - x}}$

11. $\dfrac{1}{\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}}$

12. $\dfrac{2x}{\sqrt{6 - 5x^2 - x^4}}$ ($x^2 = t$ என்க).

13. $\frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ 14. $\frac{\sec x^2}{\sqrt{9+\tan^2 x}}$

15. $\int_0^1 \frac{3x+7}{\sqrt{1-x-x^2}}$

III. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\cdot dx$ என்ற அமைப்பிலுள்ள சார்பைத் தொகையிடப் பயன்படும் அடிப்படை அமைப்புகள் :—
(a-ஐ மூலக்குறியிலிருந்து நீக்கிய பிறகு) :

1. $\int \sqrt{a^2-x^2}\cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

2. $\int \sqrt{x^2+a^2}\cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\sin h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

(அல்லது) $\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

3. $\int \sqrt{x^2-a^2}\cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\cos h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

(அல்லது) $-\frac{a^2}{2}\log\left(x^2+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

எ. கா. 1

$\int \sqrt{2x^2+3x+4}\cdot dx$

$I = \sqrt{2}\int \sqrt{x^2+\frac{3}{4}x+2}\,dx$

$= \sqrt{2}\int \sqrt{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{6}+2}\,dx$

$= \sqrt{2}\int \sqrt{(x+\frac{3}{4})^2+(\sqrt{\frac{98}{4}})^2}$

$= \sqrt{2}\left[\frac{(x+\frac{3}{4})}{2}\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+2}\right.$

$\left.+\frac{23}{32}\sinh^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\right)\right]$

எ. கா. 2.

$$\int \sqrt{3x^2 + 4x + 1} \cdot dx$$

$$I = \sqrt{3} \int \sqrt{x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{1}{3}} \cdot dx$$

$$= \sqrt{3} \int \sqrt{(x + \tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{3}}\, dx$$

$$= \sqrt{3} \int \sqrt{(x + \tfrac{2}{3})^2 - (\tfrac{1}{3})^2}\, dx$$

$$= \sqrt{3}\left[\frac{x + \frac{2}{3}}{2}\sqrt{x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}} - \frac{1}{18}\cos h^{-1}\left(\frac{x + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right)\right]$$

$$= \sqrt{3}\left[\frac{(3x + 2)}{6}\sqrt{x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{18}\cos h^{-1}(3x + 2)\right]$$

$$= \frac{(3x + 2)}{6}\sqrt{3x^2 + 4x + 1} - \frac{\sqrt{3}}{18}\cos h^{-1}(3x + 2)$$

எ. கா. 3.

$$\int \sqrt{-2x^2 + 3x + 4} \cdot dx$$

$$I = \int \sqrt{4 - 2(x^2 - \tfrac{3}{2}x)}\, dx$$

$$= \sqrt{2} \int \sqrt{2 - (x - \tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{9}{16}}\, dx$$

$$= \sqrt{2} \int \sqrt{\left(\frac{41}{\sqrt{4}}\right)^2 - (x - \tfrac{3}{4})^2}\, dx$$

$$= \sqrt{2} \int \left[\frac{(x - \frac{3}{4})}{2}\sqrt{-x^2 + \tfrac{3}{2}x + 2}\right.$$

$$\left. + \tfrac{41}{32}\sin^{-1}\left[\frac{x - \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{41}}{4}}\right]\right]$$

$$= \frac{4x - 3}{8}\sqrt{-2x^2 + 3x + 4}$$

$$+ \frac{41\sqrt{2}}{32}\sin^{-1}\left[\frac{(4x - 3)}{\sqrt{41}}\right]$$

IV $\int (px + q)\sqrt{ax^2 + bx + e} \cdot dx$ என்ற அமைப்பில் $px + q \equiv A(2ax + b) + B$ என்று முற்றொருமைப் படுத்தி A, B

மாறிலிகளைக் கணக்கிட வேண்டும். பிறகு $ax^2 + bx + c = u$ எனப் பிரதியிட,

$$(2ax + b)\, dx = du$$

$$I = A \int \sqrt{u} \cdot du + B \int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$$ எனவாகும்.

$$= A\ \tfrac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} +$$ அடிப்படை அமைப்பிலுள்ள தொகையீடு.

$$= \tfrac{2}{3} A\ (ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}} +$$ அமைப்பிலுள்ள தொகையீடு.

எ. கா. 1.

$$\int (2x + 4) \sqrt{2x^2 + 3x + 1} \cdot dx$$

$$2x + 4 \equiv A\,(4x + 3) + B$$

$$\equiv 4Ax + (3A + B)$$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த $4A = 2 \quad \therefore \quad A = \frac{1}{2}$

$$3A + B = 4 \quad \therefore \quad B = 4 - 3 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}$$

$$I = \int \tfrac{1}{2} (4x + 3) \sqrt{2x^2 + 3x + 1} \cdot dx$$

$$+ \tfrac{5}{2} \int \sqrt{2x^2 + 3x + 1} \cdot dx.$$

$$= \tfrac{1}{2} \int \sqrt{u} \cdot du + \tfrac{5}{2} \cdot \sqrt{2} \int \sqrt{x^2 + \tfrac{3}{2} x + \tfrac{1}{2}} \cdot dx,$$

$$u = 2x^2 + 3x + 1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \int \sqrt{x^2 + \tfrac{3}{2} x + \tfrac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{3}(2x^2 + 3x + 1)^{\frac{3}{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \sqrt{(x + \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{9}{16} + \tfrac{8}{16}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} (2x^2 + 3x + 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{5\sqrt{2}}{2} \left[\frac{(x + \frac{3}{4})}{2} \sqrt{x^2 + \tfrac{3}{2} x + \tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{32} \cos h^{-1} \left(\frac{x + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} \right) \right]$$

பயிற்சிகள் 18

தொகையீடு காண்க :

1. $\sqrt{x^2 + 2x + 10}$ 2. $\sqrt{1 + x - 2x^2}$

3. $(3x+2)\sqrt{x^2+x+1}$ 4. $\sqrt{x^2+2x+5}$

5. $\sqrt{x^2+2x-3}$ 6. $\sqrt{2x-x^2}$

7. $\sqrt{3-8x-3x^2}$

V. $\dfrac{1}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ என்ற அமைப்பில் தொகு படும் சார்பு இருப்பின், $px+q=\dfrac{1}{t}$ எனப்பிரதியிட, $\dfrac{1}{\sqrt{At^2+Bt+c}}$ என்ற அமைப்பில் மாறும்.

எ. கா. 1.

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-8}}$$

$x-1=\dfrac{1}{t}$ எனில் $dx=-\dfrac{1}{t^2}.\,dt$ எனவாகும்.

$$x^2+2x-8=\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)-8$$

$$=1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}-8$$

$$=\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t}-5=\frac{1+4t-5t^2}{t^2}$$

$$\therefore\ I=\int\frac{1}{\frac{1}{t}}\cdot\frac{-1}{t^2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{\frac{1+4t-5t^2}{t^2}}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+4t-5t^2}}=\frac{-1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}t-t^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{5}-(t^2-\frac{4}{5}t)}}$$

$$=-\ 5\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{5}-(t-\frac{2}{5})^2+\frac{4}{25}}}$$

$$I=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{^2-(t-\frac{2}{5})^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{5t-2}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sin^{-1}\left[\frac{\frac{5}{x-1}-2}{3}\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sin^{-1}\left[\frac{(7-2x)}{3(x-1)}\right]$$

VI. (i) $\int \frac{dx}{(Ax^2+B)\sqrt{Cx^2+D}}$ என்ற அமைப்பி விருந்தால் $x = \frac{1}{t}$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

எ. கா. 1.

$x = \frac{1}{t}$ எனில்,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} \quad dx = -\frac{1}{t^2} \cdot dt$$

$$I = \int_\infty^1 \frac{-dt}{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{\frac{1}{t^2}+2}}$$

$$= \int_1^\infty \frac{t \cdot dt}{(t^2+1)\sqrt{1+2t^2}} \; ; \; u^2 = 2t^2+1$$ எனப் பிரதியிட,

$$2 \cdot u \cdot du = 4t \cdot dt \cdot t\, dt = \frac{u}{2} \cdot du.$$

$$\therefore \; I = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{u \cdot du}{2\left(\frac{u^2-1}{2}+1\right)u},$$

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{du}{(u^2 + 1)} = \Big[\tan^{-1} u \Big]_{\sqrt{3}}^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \sqrt{3} = \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right] = \frac{\pi}{6}$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(Ax + B) \sqrt{Cx + D}}$

என்ற அமைப்பில் $Cx + D = t^2$ எனப்பிரதியிடுக.

எ. கா. 2.

$$\int_{8}^{15} \frac{dx}{(x - 3) \sqrt{x + 1}}$$

$x + 1 = t^2$ என இட $dx = 2t \cdot dt$

$x = 8$ எனில் $t^2 = 9$ $\therefore t = 3$

$x = 15$ எனில் $t^2 = 16$ $\therefore t = 4$

$$\therefore I = \int_{3}^{4} \frac{2t \cdot dt}{(t^2 - 4) \cdot t} = \int_{3}^{4} \frac{2\, dt}{t^2 - 2^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \left(\log \frac{t - 2}{t + 2} \right)_3^4$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[\log \tfrac{2}{6} - \log \tfrac{1}{5} \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \tfrac{5}{3}.$$

(iii) $\sqrt{ax + b}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள தொகுக்கப்படும் சார்பு தொகுதியிலோ பகுதியிலோ தனித்து வருமிடத்து $ax + b = t^2$ என ஈடு செய்தால் அளவுக்கிணங்கியதாகும்.

எ. கா. 3.

$$\int \frac{\sqrt{1 + x}}{x}\, dx$$

$1 + x = t^2$ என்க. $dx = 2t \cdot dt$.

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} \cdot dx = \int \frac{t \cdot 2t\,dt}{t^2 - 1}$$

$$= 2\int \frac{(t^2 - 1 + 1)\,dt}{t^2 - 1}$$

$$= 2\int 1 \cdot dt + 2\int \frac{1}{t^2 - 1} \cdot dt.$$

$$I = 2t + 2 \times \tfrac{1}{2} \log \frac{t-1}{t+1}$$

$$= 2\sqrt{1+x} + \log \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1}$$

பயிற்சிகள் 19

தொகையீடு காண்க :

1. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

2. $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$

3. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+2}}$

4. $\dfrac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{x^2-1}}$

5. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

6. $\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}$

7. $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+3}}$

8. $x^3\sqrt{x^2+4}$

9. $\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$

10. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+5}}$

11. $\dfrac{1}{(x-1\sqrt{x^2+2x-8}}$

12. $\dfrac{1}{(x+b)\sqrt{x+a}}$

13. $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}$

14. $\dfrac{\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}$

15. $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$

16. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+6x+109}}$

17. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

18. $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+3}}$

19. $\dfrac{1}{(2x+3)\sqrt{x+5}}$

20. $\dfrac{1}{(1-2x)\sqrt[3]{x^2+2x+1}}$

நிறுவுக.

21. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{\pi}{6}$

23 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$

24. $\displaystyle\int_8^{15} \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}\log\frac{5}{3}$

தொகையிடுகாண்க :

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2+2x+1}}$

26. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

VII. (i) $\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ என்ற அமைப்பு தொகுதி அல்லது பகுதியில் வந்தால்

$x = \alpha \cdot \cos^2\theta + \beta \ \sin^2\theta$ என ஈடுசெய்ய சார்பு அளவுக் கிணங்கியதாகும்.

எ. கா. 1

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}$$

$$\text{I.} = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5x-6-x^2}} = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}$$

$x = 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta$ என்க.

$$dx = [\,4\cos\theta\,(-\sin\theta) + 6\sin\theta \cdot \cos\theta\,]\, d\theta$$

$$= 2\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$x - 2 = 2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta - 2$$

$$= 3\sin^2\theta - 2(1-\cos^2\theta) = 3\sin^2\theta - 2\sin^2\theta$$

$$= \sin^2\theta$$

$$3 - x = 3 - 2\cos^2\theta - 3\sin^2\theta = 3(1-\sin^2\theta) - 2\cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x-2)(3-x)} = \sqrt{\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta} = \sin\theta \cdot \cos\theta.$$

கீழ்எல்லை $x = 2$ எனில், $2\cos^2\theta \cdot 3\sin^2\theta = 2$

$$\therefore \quad 2(1-\cos^2\theta) = 3\sin^2\theta$$

$$2\sin^2\theta = 3\sin^2\theta$$

$$\therefore \quad \theta = 0$$

மேல் எல்லை $x = 3$ எனில் $3 = 2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta$

$$3(1-\sin^2\theta) = 2\cos^2\theta$$

$$3\cos^2\theta = 2\cos^2\theta \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad I. = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\theta \cdot \cos\theta}{\sin\delta \cdot \cos\theta} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot d\theta = 2\,[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

எ. கா. 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

$x - \alpha = t^2$ என்க. $\qquad dx = 2t \cdot dt$

$$I. = \int \frac{2t \cdot dt}{t\sqrt{t^2 + \alpha - \beta}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + (\sqrt{\alpha - \beta})^2}}$$

$$= 2\log\left(t + \sqrt{t^2 + \alpha - \beta}\right)$$

$$= 2\log\left[\sqrt{x-\alpha} + \sqrt{x-\beta}\right]$$

எ. கா. 3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta - x)}}$$

$$x - \alpha = t^2$$
$$dx = 2t \cdot dt.$$

$$I. = \int \frac{2t \cdot dt}{t\sqrt{\beta - \alpha - t^2}} = 2\sin^{-1}\frac{t}{\sqrt{\beta - \alpha}}$$

எ. கா. 4.

$$\int \sqrt{(x-3)(4-x)} \cdot dx.$$

$x = 3\cos^2\theta + 4\sin^2\theta$ என்க.

$dx = [6\cos\theta(-\sin\theta) + 8\sin\theta\cdot\cos\theta]\, d\theta.$

$= 2\sin\theta\cdot\cos\theta\, d\theta.$

$x - 3 = 3\cos^2\theta + 4\sin^2\theta - 3$

$= 4\sin^2\theta - 3(1-\cos^2\theta) = \sin^2\theta$ .. (i)

$4 - x = 4 - 3\cos^2\theta - 4\sin^2\theta$

$= 4(1-\sin^2\theta) - 3\cos^2\theta = \cos^2\theta$ ...(ii)

$\therefore\; I = \int\sqrt{\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta}\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot d\theta.$

$= \int 2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\cdot d\theta.$

$$=\frac{1}{2}\int \sin^2 2\theta\cdot d\theta = \frac{1}{2}\int\frac{-\cos 4\theta}{2}\cdot d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right)$$

$= \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{16}\cdot 2\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta$

$= \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{8}\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta.$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta = 2\sqrt{(x-3)(4-x)}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (4-x) - x + 3 = 7 - 2x$

$\therefore\; I = \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{8}\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta$

$= \frac{1}{4}\sin^{-1}\sqrt{x-3}$

$- \frac{1}{8}\cdot 2\cdot\sqrt{(x-3)(4-x)} - (7-2x).$

$= \frac{1}{4}\sin^{-1}\sqrt{x-3} - \frac{1}{4}(7-2x)\sqrt{(x-3)(4-x)}$

எ. கா. 5.

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\cdot dx$$

$x = 1\cdot\cos^2\theta + 2\sin^2\theta$ என்க.

$$dx = [-2\cos\theta\cdot\sin\theta + 4\sin\theta\cdot\cos\theta]\cdot d\theta.$$

$$dx = 2\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot d\theta$$

$$x - 1 = \cos^2\theta + 2\sin^2\theta - 1$$

$$= 2\sin^2\theta - (1-\cos^2\theta) = \sin^2\theta.$$

$$2 - x = 2 - \cos^2\theta - 2\sin^2\theta$$

$$= 2(1-\sin^2\theta) - \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - \cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta.$$

$$\therefore \int \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\cdot dx = \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot d\theta$$

$$= \int 2\sin^2\theta\cdot d\theta.$$

$$= \int \frac{(1-\cos 2\ )}{2}\cdot d$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}$$

$$= \tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta.$$

$$= \tfrac{1}{2}[\sin^{-1}\sqrt{x-1} - \sqrt{(x-1)(2-x)}]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\sin^{-1}\sqrt{x-1} - \sqrt{3x-2-x^2}]$$

VIII (*i*) $x = a\sin\theta$, $a\tan\theta$, $a\sec\theta$ என்று ஈடு செய்தும், முறையே $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ என்ற அமைப்பில் வரும் சார்புகளை அளவுக்கிணங்கியன வாக்கலாம்.

(இவற்றைப் பகுதிகளாக்கித் தொகை காணும் முறையில் முன்பு செய்தோம்).

எ: கா. 1.

$$\int \frac{x^3+1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx,$$

$x = \sin\theta$ எனில், $dx = \cos\theta\cdot d\theta$

$$\sqrt{1-x^2} = \cos\theta.$$

$$\int \frac{x^3+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{(\sin^3\theta+1)}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \sin^3\theta\cdot d\theta + \int d\theta$$

$$= \int \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}\,d\theta + \theta$$

$$= \tfrac{3}{4}\int \sin\theta\cdot\theta - \tfrac{1}{4}\int \sin 3\theta\,d\theta + \theta$$

$$= \frac{3}{4}(-\cos\theta) - \frac{1}{4}\left(\frac{-\cos 3\theta}{3}\right) + \theta$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\cos\theta + \frac{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}{12} + \theta$$

$$= \theta - \tfrac{3}{4}\cos\theta + \tfrac{1}{3}\cos^3\theta - \tfrac{1}{4}\cos\theta$$

$$= \theta - \cos\theta + \tfrac{1}{3}(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

எ. கா. 2.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

$x = 2\tan\theta$ · என்க. $dx = 2\sec^2\theta\cdot d\theta$

$$4+x^2 = 4+4\tan^2\theta = 4(1+\tan^2\theta) = 4\sec^2\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\cdot d\theta}{4\tan^2\theta\cdot 2\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos^2\theta\cdot\sec\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(\sin\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} \quad (u = \sin\theta)$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u} = -\frac{1}{4\sin\theta}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sqrt{1+\cot^2\theta}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}}$$

$$= -\frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}} = -\frac{2}{4}\frac{\sqrt{4+x^2}}{2x}$$

$$= -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}$$

எ. கா. 3.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$$

$x = 3\sec\theta$. என்க $dx = 3\sec\theta\cdot\tan\cdot\theta\, d\theta$

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\sec^2\theta - 9} = 3\tan\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot d\theta}{27\sec^3\theta\cdot 3\tan\theta}$$

$$= \tfrac{1}{27}\int \cos^2\theta\cdot d\theta$$

$$= \tfrac{1}{54}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{54}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] = \frac{1}{54}[\theta + \sin\theta\cdot\cos\theta]$$

$$= \frac{1}{54}\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{1}{54}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\cdot\frac{3}{x}$$

$$= \frac{1}{54}\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{1}{18}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}$$

IX. பகுதியில் அளவுக்கிணங்கா தொகுப்புக் கோவை இருப்பின், தொகுதியையும் பகுதியையும் துணையியச் சார்பால் (Conjugate function) பெருக்கினுல் பகுதி அளவுக்கிணங்கிய தாகும்.

எ. கா. 1.

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

பகுதியின் துணையியச் சார்பு $x - \sqrt{x^2 - 1}$

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{(x + \sqrt{x^2 - 1})\,(x - \sqrt{x^2 - 1})}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - (x^2 - 1)} = x - \sqrt{\quad {}^{2} - 1}$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \int (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot dx$$

$$= \int x\,dx - \int \sqrt{x^2 - 1}\;dx.$$

$$= \frac{x^2}{2} - \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \tfrac{1}{2}\cos^{-1} x\right]$$

எ. கா. 2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}}$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}) \cdot dx}{(\sqrt{x} + \sqrt{x - 1})\,(\sqrt{x} - \sqrt{x - 1})}$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x - 1})}{(x - x + 1)}\,dx$$

$$= \int \sqrt{x} \cdot dx - \int \sqrt{x - 1} \cdot dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{(x - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\,(x - 1)^{\frac{3}{2}}$$

பயிற்சிகள் 20

தொகையீடு காண்க :

1. $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+2}}$ 2. $\sqrt{\dfrac{5-x}{x-2}}$

3. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

4. $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{(x-2)(3-x)}\,dx.$

5. $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\,dx$ 6. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-x+3}}$

7. $\dfrac{1}{x\sqrt{2+x-x^2}}$ 8. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$

9. $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$

10. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}}$

11. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+9}}$ 12. $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

13. $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}$ 14. $x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

15. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 16. $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

17. $\sqrt{(x+1)(4-x)}$

18. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

19. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

20. $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

21. $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

22. $\dfrac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

23. $\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax+c}}$

24. $\displaystyle\int_a^b \frac{x \cdot dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \cdot (a < b)$

25. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \cdot dx = \frac{\pi}{2}$ எனக்காட்டுக.

26. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

27. $\dfrac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

28. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\,dx\,1$

29. $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{(x-2)(3-x)} \cdot dx = \frac{\pi}{8}$ எனக் காட்டுக.

30. $\int_{2}^{3} [(x-2)(3-x)]^{\frac{3}{2}} \cdot dx.$

31. $\dfrac{1}{x^3 (x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$ 32. $\dfrac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

33. $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$ 34. $\sqrt{e^x-1}$

35. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2 \cdot dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

§ 22. கோணவிகிதச் சார்புகளும் அதன் படிகளும் (மீள் பார்வை)

நிறுவப்பட்ட அடிப்படை அமைப்புகளாவன :

1. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x.$
2. $\int \cos x \cdot dx = \sin x.$
3. $\int \tan x \cdot dx = \log \sec x.$
4. $\int \cot x \cdot dx = \log \sin x.$
5. $\int \sec^2 x \cdot dx = \tan x$
6. $\int \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx = -\cot x$

மேலும் சிலவற்றை இங்கே காண்போம்.

7. $\int \operatorname{cosec} x \cdot dx = \int \dfrac{1}{\sin x} \cdot dx$

$$= \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} \cdot dx$$

$$= \int \frac{\cos \frac{x}{2}\, dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} \cdot}{\tan \frac{x}{2}} \frac{dx}{2}$$

$$= \int \frac{d \left(\tan \frac{x}{2} \right)}{\tan \frac{x}{2}}$$

$$= \log \left(\tan \frac{x}{2} \right)$$

8. $\int \sec x \cdot dx = \int \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \cdot dx$

$$= \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

9. $\int \sin^2 x \cdot dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right)$$

10. $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{(1 + \cos 2x)}{2} \cdot dx =$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right)$$

11. $\int \tan^2 x \cdot dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \tan x - x$

12. $\int \cot^2 x\, dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx = -\cot x - x$

13. $\int \sin^3 x\, dx = \int \frac{(3 \sin x - \sin 3x)}{4}\, dx$

$$= -\tfrac{3}{4} \cos x + \tfrac{1}{12} \cos 3x$$

14. $\int \cos^3 x \cdot dx = \int \frac{(3 \cos x + \cos 3x)}{4}\, dx$

$$= \tfrac{3}{4} \sin x + \tfrac{1}{12} \sin 3x$$

7. கோணவிகிதச் சார்புகளை இயற்கணிதச் சார்புகளாக்கித் தொகை காணல்

§ **23.**

எ. கா. 1.

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$$

இங்கு $\cos x = u$ எனில் $-\sin x \cdot dx = du$

$$\therefore \int \cos^4 x \cdot \sin^3 x \cdot dx = -\int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \, du$$

$$= -\int u^4 (1 - u^2) \cdot du$$

$$= -\int (u^4 - u^6) \, du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}$$

குறிப்பு : $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$-ல் $\sin x$-ன் படி m ஒற்றைப் படையெனில் $u = \cos x$ என்றும் $\cos x$-ன் படி n ஒற்றைப்படையாயின் $u = \sin x$ என்றும் பிரதியிடவேண்டும்.

எ. கா. 2.

$$\int \sin^5 x \cdot dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \cdot d(-\cos x)$$

$$= -\int (1 - \cos^2 x)^2 \, d(\cos x)$$

$$= -\int (1 - C^2)^2 \cdot dC, \quad C = \cos x$$

$$= -\int (1 - 2C^2 + C^4)\, dC$$

$$= -\left(C - \frac{2}{3} C^3 + \frac{C^5}{5} \right)$$

$$= -\cos x + \tfrac{2}{3} \cos^3 x - \tfrac{1}{5} \cos^5 x$$

எ. கா. **3.**

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^7 x \cdot dx$$

$C = \cos x$ என்க.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^7 x \cdot dx = \int (1 - C^2) \cdot C^7\, d(-C)$$

$$= -\int (C^7 - C^9)\, dC$$

$$= -\left(\frac{C^8}{8} - \frac{C^{10}}{10} \right)$$

$$= \tfrac{1}{10} \cos^{10} x - \tfrac{1}{8} \cos^8 x$$

எ. கா. **4.**

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} \cdot dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\sin^7 x} \cdot dx$$

$$= \int \frac{(1 - \sin^2 x)\, d(\sin x)}{\sin^7 x}$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^7 x} - \int \frac{\sin^2 x\, d(\sin x)}{\sin^7 x}$$

$$= -\frac{1}{6 \sin^6 x} + \frac{1}{4 \sin^4 x}$$

(அல்லது)

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} \cdot dx = \int \cot^3 x \cdot \operatorname{cosec}^4 x \cdot dx$$

$$= \int \cot^3 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx$$

$$= \int \cot^3 x \cdot (1 + \cot^2 x)\, d(-\cos x)$$

$$= -\int u^3 (1 + u^2)\, du \; ; \; u = \cot x$$

$$= -\int (u^3 + u^5)\, du = -\left(\frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6}\right)$$

$$= -\left(\frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^6 x}{6}\right)$$

எ. கா. 5.

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cdot \cos x} = \int \frac{dx}{\sin^6 x \cdot \cot x}$$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}^6 x}{\cos x} \cdot dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}^4 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x}{\cot x} \cdot dx$$

$$I = \int \frac{(1 + \cot^2 x)^2\, d(-\cot x)}{\cot x}$$

$$= -\int \frac{(1 + u^2)^2\, du}{u}, \quad u = \cot x$$

$$= -\int \left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right) du$$

$$= -\left(\log u + u^2 + \frac{u^4}{4}\right)$$

$$= -\left(\log \cot x + \cot^2 x + \tfrac{1}{4} \cdot \cos^4 x\right)$$

எ. கா. 6.

$$\int \cos^3 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx$$

$u = \sin x$ எனில், $du = \cos x \cdot dx$

$$\int \cos^3 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx = \int \frac{(1 - u^2)\, du}{u^2}$$

$$= \int \frac{1}{u^2} \cdot du - \int 1 \cdot du$$

$$= -\frac{1}{u} - u = -\frac{1}{\sin x} - \sin x$$

$$= -(\operatorname{cosec} x + \sin x)$$

எ. கா. 7.

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} \cdot dx = \int \tan^4 x \cdot \sec^2 x \cdot dx.$$

$u = \tan x$ எனில், $du = \sec^2 x \cdot dx.$

$$\int \tan^4 x \cdot \sec^2 x \cdot dx = \int u^4 \cdot du$$

$$= \frac{u^5}{5} = \frac{\tan^5 x}{5}$$

எ. கா. 8.

$$\int \sin 2x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$= \int 2 \sin x \cdot \cos x \cos x \cdot dx$$

$$= \int 2 \cos^2 x \cdot d(-\cos x)$$

$$= -2 \int u^2 \cdot du, \qquad u = \cos x$$

$$= -\frac{2u^3}{3} = -\frac{2}{3} \cos^3 x.$$

எ. கா. 9.

$$\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot dx$$

$$\sin 2x \cdot \sin 3x = \tfrac{1}{2} (\cos x - \cos 5x)$$

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \tfrac{1}{2} \sin x \cdot \cos x - \tfrac{1}{2} \sin x \cdot \cos 5x.$$

$$= \tfrac{1}{4} \sin 2x - \tfrac{1}{4} [\sin 6x - \sin 4x]$$

$$= \tfrac{1}{4} (\sin 2x - \sin 6x + \sin 4x)$$

$$\therefore \int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot dx.$$

$$= \int \tfrac{1}{4} (\sin 2x - \sin 6x + \sin 4x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos 6x}{6}$$

$$- \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos 4x}{4}$$

$$= -\tfrac{1}{8}\cdot\cos 2x + \tfrac{1}{24}\cos 6x$$

$$- \tfrac{1}{16}\cos 4x$$

எ. கா. 10.

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\theta}\,\cos^5\theta \cdot d\theta.$$

$u = \sin\theta$ · என்க : $\qquad du = \cos\theta \cdot d\theta.$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ எனில் $u = 1$

$\theta = 0$ எனில் $u = 0$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\theta}\cdot\cos^5\theta \cdot d\theta = \int_0^1 \sqrt{u}\,(1-u^2)^2\,du$$

$$= \int_0^1 \sqrt{u}\,[1 - 2u^2 + u^4]\,du$$

$$= \int_0^1 \left(u^{\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{5}{2}} + u^{\frac{9}{2}}\right)du$$

$$= \left[\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{7}u^{\frac{7}{2}} + \tfrac{2}{11}\cdot u^{\frac{11}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{7} + \frac{2}{17} = \frac{154 - 132 + 42}{231}$$

$$= \frac{64}{231}$$

(ii) $\int \tan^n x \cdot dx$, $\int \cot^n x \, dx$, n ஒரு மிகை முழு எண் எனில், படியை இரண்டு இரண்டாகக் குறைத்துத் தொகை காண வேண்டும்.

எ. கா. 1.

$$\int \cot^4 x \cdot dx = \int \cot^2 x \cdot \cot^2 x \cdot dx$$

$$= \int \cot^2 x \, (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \cot^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x - \int \cot^2 x \cdot dx$$

$$= \int \cot^2 x \, d(-\cot x) - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx$$

$$= -\tfrac{1}{3} \cdot \cot^3 x + \cot x + x$$

எ. கா. 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x \cdot dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 \cdot x \, (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{4}{\pi}} \tan^3 x \cdot \sec^2 x \cdot dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \cdot dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \cdot d(\tan x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, (\sec^2 x - 1) \cdot dx$$

$$= \left[\frac{\tan^4 x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \sec^2 x \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot d(\tan x) + \Big[\log \sec x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} - \left[\frac{\tan^4 x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\log \sqrt{2} - \log 1]$$

$$= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \log \sqrt{2} = \log \sqrt{2} - \tfrac{1}{4}$$

(iii) $\int \sec^n x \cdot dx$, $\int \operatorname{cosec}^n x \cdot dx$, n ஓர் இரட்டைப்படை மிகை முழு எண்ணெனில் $\tan x$, $\cot x$-ஆக மாற்றலாம்.

எ. கா. 3.

$$\int \sec^6 x \cdot dx.$$

$$= \int \sec^4 x \cdot \sec^2 x \cdot dx = \int (1 + \tan^2 x)^2 \, d(\tan x)$$

$$= \int (1 + 2t^2 + t^4) \, dt, \qquad t = \tan x.$$

$$= t + \frac{2}{3} t^3 + \frac{t^5}{5} = \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x$$

(iv) $\int \tan^m x \cdot \sec^n x \cdot dx$, $\int \cot^m x$, $\operatorname{cosec}^n x \cdot dx$.

n ஓர் இரட்டைப் படை மிகை முழு எண்ணுகவும் m ஏதாவதொரு முழு எண்ணுகவுமிருந்தால் $\tan x$, $\cot x$ சார்பாக மாற்றலாம்.

எ. கா. 4.

$$\int \cot^6 x \operatorname{cosec}^4 x\, dx.$$

$$= \int \cot^6 x \operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx$$

$$= \int \cot^6 x\,(1 + \cot^2 x)\, d(-\cot x)$$

$$= -\int u^6 (1 + u^2)\, du, \qquad u = \cot x.$$

$$= -\int (u^6 + u^8)\, du = -\left(\frac{\cot^7 x}{7} + \frac{\cot^9 x}{9}\right)$$

(v) $\tan^m x \cdot \sec^n x \cdot dx$, $\int \cot^m x \cdot \operatorname{cosec}^n x \cdot dx$. m ஓர் ஒற்றைப்படை மிகை முழு எண்ணாயின் $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ சார்பாக மாற்றலாம்.

எ. கா. 5.

$$\int \tan^3 x \cdot \sec^7 x \cdot dx.$$

$$= \int \tan^2 x \cdot \sec^6 x \cdot \tan x \cdot \sec x \cdot dx.$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^6 x \tan x \cdot d(\sec x)$$

$$= \int (u^2 - 1)\, u^6 \cdot du, \qquad u = \sec x.$$

$$= \int (u^8 - u^6)\, du = \frac{u^9}{9} - \frac{u^7}{7}$$

$$= \frac{\sec^9 x}{9} - \frac{\sec^7 x}{7}$$

பயிற்சிகள் 21

தொகையீடு காண்க :

1. $\cos^4 \theta \cdot \sin^3 \theta$ 2. $\sin^{\frac{3}{7}} \theta \cdot \cos^5 \theta$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{11}{2}} x \cdot \cos^5 x \cdot dx$

4. $\cos^3\theta \operatorname{cosec}^2\theta$.

5. $\cot^5\theta$.

6. $\cos^2 x \cdot \operatorname{cosec}^6 x$

7. $\tan^4 x$.

8. $\cot^5 x$.

9. $\sec^8 x$.

10. $\operatorname{cosec}^6 x$.

11. $\dfrac{1}{(1+\cos x)}$

12. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$

13. $\cot^8 x \cdot \operatorname{cosec}^4 x$.

14. $\tan^{\frac{3}{2}} x \cdot \sec^4 x$.

15. $\cot^5 x \cdot \operatorname{cosec}^4 x$.

16. $\tan^3 x \cdot \sec^5 x$.

17. $\tan^5 x \cdot \sec^{\frac{3}{2}} x$.

18. $(\tan x + \cot x)^3$

§ 24. (i) கோணவிகிதச் சார்பு

$\dfrac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}$ என்ற அமைப்பில் பகுதிதொகுதிகளில் $\sin x$, $\cos x$ வரும்போது கீழ்க்கண்டவாறு தொகை காணலாம். பகுதியின் வகைக் கெழு $\dfrac{d}{dx}$ $(c\cos x + d\sin x) = -c\sin x + d\cos x$. தொகுதி $a\cos x + b\sin x \equiv A(-c\sin x + d\cos x) + B\,(c\cos x + d\sin x)$ எனக்கொண்டு, முற்றொருமையி லிருந்து A, B மாறிலிகளின் மதிப்பைக் காண்க.

இப்போது $\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x} \cdot dx$

$$= A\int \frac{(-c\sin x + d\cos x)}{c\cos x + d\sin x}\,dx + B\int dx.$$

$$= A\int \frac{du}{u} + B\,dx, \quad u = c\cos x + d\sin x$$

$$= A\log(c\cos x + d\sin x) + Bx.$$

எ. கா. 1.

$$\int \frac{2\cos x + 3\sin x}{4\cos x + 5\sin x}\,dx$$

$u = 4\cos x + 5\sin x$ என்றால்,

$du = (-4\sin x + 5\cos x)\,dx.$

$$2\cos x + 3\sin x \equiv A(-4\sin x + 5\cos x) + B(4\cos x + 5\sin x)$$

$\cos x, \sin x$ குணகங்களைச் சமப்படுத்த,

$$5A + 4B = 2 \qquad \dots \text{(i)}$$

$$-4A + 5B = 3 \qquad \dots \text{(ii)}$$

(i) $\times 4 +$ (ii) $\times 5$, $41B = 23$ $\therefore B = \frac{23}{41}$

(i) $\times 5 -$ (ii) $\times 4$, $41A = -2$ $\therefore A = \frac{-2}{41}$

$$I = \frac{-2}{41}\int \frac{(-4\sin x + 5\cos x)}{4\cos x + 5\sin x}\,dx + \frac{23}{41}\int dx.$$

$$= \frac{-2}{41}\int \frac{du}{u} + \frac{23}{41}x, \quad u = 4\cos x + 5\sin x.$$

$$= \frac{-2}{41}\log(4\cos x + 5\sin x) + \frac{23}{41}x.$$

எ. கா. 2.

$$\int \frac{5\cos\theta \cdot d\theta}{2\cos\theta + \sin\theta}$$

$u = 2\cos\theta + \sin\theta$ என்று கொண்டால்

$$du = (-2\sin\theta + \cos\theta)\, d\theta$$

$$5\cos\theta \equiv A(-2\sin\theta + \cos\theta) + B(2\cos\theta + \sin\theta)$$

$\cos\theta$-ன் குணகம், $\quad A + 2B = 5 \qquad$ (i)

$\sin\theta$-ன் குணகம், $-2A + \quad B = 0 \qquad$ (ii)

(i) $\times 2 +$ (ii), $\quad 5B = 10 \quad \therefore \quad B = 2$

$$A = 1$$

$$\therefore \int \frac{5\cos\theta\, d\theta}{2\cos\theta + \sin\theta} = \int \frac{(-2\sin\theta + \cos\theta)}{2\cos\theta + \sin\theta}\, d\theta + 2\int d\theta$$

$$= \int \frac{du}{u} + 2\theta : u = 2\cos\theta + \sin\theta$$

$$= \log(2\cos\theta + \sin\theta) + 2\theta$$

(ii) பொதுப்படையாக $\sin x$, $\cos x$ வருமிடத்து $t = \tan\frac{x}{2}$

எனப்பிரதியிட்டால் $x = 2\tan^{-1}t : dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$,

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} : \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ எனவாகும்.

$a > b$ எனில் $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\cos x}$

$$= \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(a + b\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{a + at^2 + b - bt^2} = 2\int \frac{dt}{(a-b)\,[t^2 + (a+b)]}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2 + t^2}$$

$$= \frac{2}{a-b} \times \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\, t\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \tan\frac{x}{2}\right)$$

$a < b$ எனில் $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$

$$= 2\int \frac{dt}{(b+a)-(b-a)t^2}$$

$$= \frac{2}{(b-a)}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)^2 - t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \left\{\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}\right\}$$

எ. கா. 3.

$$\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ என்க. $x = 2 \tan^{-1} t$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{5 + 4\cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(5 + 4 \times \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$= 2\int \frac{dt}{5(1+t^2) + 4(1-t^2)}$$

$$= 2\int \frac{dt}{9 + t^2} = 2\int \frac{dt}{3^2 + t^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \tan^{-1}t = \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

(iii) $\int \frac{a\cos x + b\sin x + c}{p\cos x + r\sin x + r}\,dx$ என்ற அமைப்பில் பின்வருமாறு செய்யவும்.

எ. கா. 4.

$$\int \frac{8\cos x + \sin x + 5}{2\sin x + 3\cos x + 4}\,dx$$

$u = 2\sin x + 3\cos x + 4$ எனில்

$du = (2\cos x - 3\sin x)\,dx.$

$$8\cos x + \sin x + 5 \equiv A(2\cos x - 3\sin x) + B(2\sin x + 3\cos x + 4) + C$$

$$\equiv (2A + 3b)\cos x + (-3A + 2B)\sin x + (C + 4B)$$ என்க.

குணகங்களைச் சமப்படுத்த,

$2A + 3B = 8$ ... (i)

$-3A + 2B = 1$ ... (ii)

$C + 4B = 5$ ... (iii)

(i) × 3 + (ii) × 2, $13B = 26$ $\therefore B = 2$

$2A + 6 = 8$ $\therefore A = 1$

$C + 8 = 5$ $\therefore C = -3$

$$I = \int \frac{8\cos x + \sin x + 5}{2\sin x + 3\cos x + 4}\,dx.$$

$$= \int \frac{(2\cos x - 3\sin x)}{2\sin x + 3\cos x + 4}\,dx.$$

$$+ 2 \int dx - 3 \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 4}$$

$$= \log (2 \sin x + 3 \cos x + 4) + 2x - 3\, I_1$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 4}$$

$$t = \tan \frac{x}{2} \qquad \therefore \quad 2 \frac{dt}{1 + t^2} = dx.$$

$$I_1 = \int \frac{2dt}{(1 + t^2)\left(2 \times \frac{2t}{1 + t^2} + 3 \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 4 \right)}$$

$$= 2 \int \frac{dt}{4t + 3 - 3t^2 + 4 + 4t^2}$$

$$I_1 = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 7} = 2 \int \frac{dt}{(t + 2)^2 - 4 + 7}$$

$$= 2 \int \frac{dt}{(t + 2) + (\sqrt{3})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{t + 2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left\{ \frac{\tan \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$\therefore \quad I = \log (2 \sin x + 3 \cos x + 4) + 2x$$

$$- 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left\{ \frac{\tan \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{3}} \right\}$$

(iv) $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$ என்ற அமைப்பில்

$a = r \cos \alpha$, $b = r \sin \alpha$ என ஈடு செய்தால்,

$$I = \int \frac{dx}{r \cos \alpha \cdot \cos x + r \sin \alpha \cdot \sin x + c}$$

(a, b, c, r, α மாறிலிகள்)

$$= \int \frac{dx}{r \cos (x - \alpha) + c}$$

$$= \int \frac{dy}{r\cos y + c}, \quad y = x - \alpha$$
$$dy = dx.$$

(a) $c = 0$ எனில்,

$$I = \int \frac{dy}{r\cos y} = \frac{1}{r}\int \sec y \cdot dy.$$

$$= \frac{1}{r}\log(\sec y + \tan y)$$

(b) $c \neq 0$ எனில் $t = \tan\frac{y}{2}$ என ஈடு செய்து தொடரவும்.

பயிற்சிகள் 22

தொகையீடு காண்க :

1. $\dfrac{2\sin x + \cos x}{5\sin x - 3\cos x}$
2. $\dfrac{10\sin x - 11\cos x}{3\sin x - 2\cos x}$
3. $\dfrac{7\sin x}{5\cos x + 2\sin x}$
4. $\dfrac{1}{4 + 5\cos x}$
5. $\dfrac{1}{1 - 3\sin x}$
6. $\dfrac{1}{1 + \sin x + \cos x}$
7. $\dfrac{1}{\sin x(1 + \sin x)}$
8. $\dfrac{1}{5 + 4\cos x - 3\sin x}$
9. $\dfrac{1}{1 - 3\cos x + 2\sin x}$
10. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{5 + 3\cos x}$
11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x}.$
12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + 2\cos x}$
13. $\dfrac{1}{1 + \tan x}$
14. $\dfrac{\sin x}{5 + 4\sin x}$

15. $\dfrac{\cos x}{5 - 3\cos x}$ 16. $\dfrac{1 + 2\sin x}{1 + 3\sin x}$

17. $\dfrac{2\sin x + \cos x + 3}{5 + 8\cos x}$. 18. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 - 2ab\cos x + b^2}$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + e\cos x)^2}$ $\left[\tan\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\dfrac{u}{2}\right.$ என ஈடு செய்க. $\Big]$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos\theta + b\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \log\tan\left(\frac{x + \alpha}{2}\right)$ எனக்காட்டுக. $\left(\alpha = \tan^{-1}\dfrac{a}{b}\right)$

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2}$ என்ற அமைப்பில் பகுதி, தொகுதியை $\sec^2 x$-ஆல் பெருக்க

$$I = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)\sec^2 x}$$

$$I = \int \frac{d(\tan x)}{a^2 + b^2\tan^2 x} = \int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2},\ t = \tan x$$

$$= \frac{1}{b^2}\int \frac{dt}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + t^2} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \tan^{-1}\left[\frac{t}{\frac{a}{b}}\right]$$

$$= \frac{1}{ab} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)$$

பயிற்சிகள் 23

தொகையீடு காண்க :

1. $\dfrac{1}{1 + 7\cos^2 x}$ 2. $\dfrac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$

3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+2\cos^2\theta} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta \cdot d\theta}{2+\sec^2\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ என நிறுவுக.

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x \cdot dx}{(\sec x + \tan x)^n} = \frac{n}{n^2 - 1}$ என நிறுவுக.

($\sec x + \tan x = u$ என்க.)

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \text{ sco}^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+a^2)(1+h^2)}$

எனக்காட்டுக.

6. $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x} = \frac{1}{2} \tan x$

$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \tan^{-1} \cdot (\sqrt{2} \tan x)$ எனக்காண்க.

8. பகுதிகளாக்கித் தொகை காணும் முறை

§ 25. அடுக்குகளைப் படிப்படியாகச் சுருக்கித் தொகை காணல் ; (Method of Successive Reduction)

(i) $I_n = \int x^n \cdot e^{ax} \cdot dx,$ n ஒரு மிகைமுழு எண்.

$u = x^n$ என்றால் $du = n \cdot x^{n-1}\, dx$

$du = e^{ax} \cdot dx \quad \therefore \quad v = \frac{e^{ax}}{a}$

$$\therefore \quad I_n = \int x^n \cdot d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)$$

$$= \lambda^n \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot n \cdot x^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \cdot x^n \cdot e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} \cdot e^{ax}\, dx$$

$$= \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

$$- \frac{x^n}{a} \cdot e^{ax} - \frac{n}{a}\left[\frac{x^{n-1}}{a} \cdot e^{ax} - \frac{(n-1)}{a} \cdot I_{n-2}\right]$$

$$= \frac{1}{a} x^n \cdot e^{ax} - \frac{n}{a^2} \cdot x^{n-1} \cdot e^{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}$$

இறுதியாக, $I_0 = \int e^{ax} \cdot dx = e\frac{ax}{a}$

(ii) $I_n = \int x^n \cdot \cos ax \cdot dx$

இங்கு $u = x^n \cdot \quad dx = du = n \cdot x^{n-1} \cdot dx$

$$dv = \cos ax \cdot dx \quad v = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\therefore \quad I_n = \int x^n \cdot \cos ax \cdot dx = \int x^n \cdot d\frac{(\sin ax)}{a}$$

$$= \frac{x^n \cdot \sin ax}{a} - \int \frac{\sin ax}{a} \cdot n \cdot x^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} d\frac{(-\cos ax)}{a}$$

$$= \frac{x^n}{a} \cdot \sin ax + \frac{n}{a^2} x^{n-1} \cdot \cos ax$$

$$- \frac{n}{a^2} \int \cos ax\,(x-1)x^{n-2} \cdot dx$$

$$= \frac{x^n}{a} \sin ax + \frac{n}{a^2} x^{n-1} \cos ax - \frac{n\,(n-1)}{a^2}\, I_{n-2}$$

இறுதியாக (a) $\int x \cdot \cos ax \cdot dx$

$$= \int x \cdot d\left(\frac{\sin ax}{a}\right)$$

$$= \frac{x}{a} \sin ax - \frac{1}{a} \int \sin ax \cdot dx$$

$$= \frac{x}{a} \sin ax + \frac{\cos ax}{a^2} \text{ எனவோ}$$

அல்லது (b) $\int \cos ax \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax$ எனவோ முடியும்.

பயிற்சிகள் 24

தொகையீடு காண்க :

1. $x^2 \cdot e^{-x}$ 2. $x^3 \cdot e^{2x}$
3. $e^x (x-2)^2$ 4. $x \cdot \cos ax$
5. $x^2 \sin bx$ 6. $x^3 \cos (x + \alpha)$
7. $x^n \cdot \sin ax$க்குச் சுருக்க வாய்பாடு காண்க.

8. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cdot \cos x \, dx$ எனக் கொண்டு

$I_n + n(n-1) I_{n-2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ என நிறுவுக.

9. மதிப்பு காண்க. $\int_0^1 x^n \cdot e^x \cdot dx$

(iii) $I_n = \int \sin^n x \cdot dx$

$$= \int \sin^{n-1} \cdot x \sin x \, dx = \int \sin^{n-1} x \, d(-\cos x)$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + \int \cos x \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \cdot dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x \cdot (1-\sin^2 x) \, dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\therefore I_n + (n-1) I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

$$n I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\therefore I_n = -\frac{1}{n} \cdot \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

கிளை 1: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x^n dx$

$$= -\frac{1}{n} \left(\cos x \cdot \sin^{n-1} x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \cdot I_{n-4}$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{n(n-2)(n-4)} I_{n-6}$$

(i) n இரட்டைப் படையானல்

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots}{n(n-2)(n-4)} I_0$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \Big[x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)\ldots\ldots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(ii) n ஒற்றைப்படையானல்

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 4\cdot 2}{n(n-2)(n-4)\ldots\ldots 5\cdot 3} \cdot I_1$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 4\cdot 2}{n(n-2)\ldots\ldots 5\cdot 3} \cdot 1$$

(iii) $I_n = \int \cos^n x \cdot dx$

$$= \int \cos^{n-1} \cdot x \cos x \cdot dx = \int \cos^{n-1} x \cdot d(\sin x)$$

$$= \sin x \cdot \cos^{n-1} x - \int \sin x \, (n-1) \cos^{n-2} x . (-\sin x)\, dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} \cdot \sin^2 x \cdot dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} \cdot (1 - \cos^2 x)\, dx.$$

$$= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$I_n(1 + n - 1) = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.$$

கிளை 2: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos^n x\, dx) = \frac{1}{n} (\sin x \cdot \cos^{n-1} x)_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} I_{n-4}$$

கிளை 3: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot dx$

ஆனதால் $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$-க்கு மதிப்புக் காணும் வாய்பாடு

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot dx$ க்குப் பொருந்தும்.

(iv) $I_{m,n} = \int \sin^m x \cdot \cos^n dx$-க்குச் சுருக்க வாய்பாடு காண்க.

$$I_{m,n} = \int \sin^{m-1} x \cdot \cos^n x \cdot d(-\cos x)$$

$$= -\int \sin^{m-1} x \cdot d\left(\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{n+1} \sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x$$

$$+ \int \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} \cdot (m-1) \sin^{m-2} x \cdot \cos x \, dx$$

$$= -\frac{1}{n+1} \sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x$$

$$+ \frac{m-1}{n+1} \int \cos^n x \cdot \cos^2 x \sin^{m-2} x \cdot dx$$

$$= -\frac{1}{n+1} \sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x$$

$$+ \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^n x \, (1 - \sin^2) \, dx$$

$$= -\frac{1}{n+1} \sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n}$$

$$- \frac{(m-1)}{n+1)} I_{m,n}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{m-1}{m+1}\right) I_{m,n} = -\frac{1}{n+1} \sin^{m-1} \cdot x \cos^{n+1} x$$

$$+ \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n}$$

$$\frac{n+m}{n+1} I_{m,n} = -\frac{1}{n+1} \sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x$$

$$+ \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n}$$

$$I_{m,n} = -\frac{1}{m+n} \sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

குறிப்பு 1. sin x-ன் படியைக் குறைப்பதைவிட்டு cos x-ன் படியைக் குறைத்திருந்தால் வாய்பாடு

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,\, n-2}$$

இதைப் பயிற்சியாகச் செய்யவும்.

$$\text{இங்கு } \int \sin^m x \cdot \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^m x \cdot \cos^{n-1} x \cdot d(\sin x)$$

$$\int \cos^{n-1} x \cdot d\left(\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\right) \text{ என்று தொடரவும்.}$$

குறிப்பு 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$-ன் தொகை.

தொகுதி :

$\cos^n x$-ல் n-ன் படியைப் படிப்படியாகக் குறைக்கும் பொழுது, தொகுதியின் காரணிகள் $n-1$, $n-3$, $n-5$ ………… எனக் குறைந்து, n ஒற்றைப்படை அல்லது இரட்டைப்படையான முழு எண் என்பதற்கேற்ப, முறையே 2 அல்லது 1-ல் முடியும். அப்பொழுது cos x-ன் படி முறையே 1 அல்லது 0 ஆகும்.

இதுபோலவே $\sin^m x$-ல் m-ன் படியும் படிப்படியாகக் குறையும் போது, தொகுதியில் காரணிகள் $m-1$, $m-3$, $m-5$ ………… எனக்குறைந்து, m ஒற்றைப்படை அல்லது இரட்டைப்படை முழு எண் என்பதற்கேற்ப முறையே 2 அல்லது 1-ல் முடியும். அப்பொழுது sin x-ன் படி 1 அல்லது 0 ஆகும்.

பகுதி :

பகுதியின் காரணிகள்$(m+n)$-ல் தொடங்கி cos x அல்லது sin x-ன் படி ஒவ்வொரு முறையும் குறையும்போது 2, 2 ஆகக் குறைந்து $(m+n)$, $(m+n-2)$, $(m+n-4)$ …… எனவாகும்.

கவனிக்க :

m, n படிப்படியாகக் குறையும்போது எந்த நிலையிலும் (at any stage of reduction)

(i) தொகுதியிலும் பகுதியிலும் சம எண்ணிக்கையுள்ள காரணிகள் இருக்கும்.

(ii) பகுதியிலுள்ள கடைசிக் காரணியின் மதிப்பு குறைக்கப் படாமலிருக்கும். cos x, sin x-ன் படிகளின் கூடுதலைவிட 2 அதிக மாக விருக்கும்.

முடிவு :

(a) m, n இரண்டும் ஒற்றைப்படையானல்

$$\text{முடிவு} \int_0^{\frac{a}{2}} \sin x \cdot \cos dx = \left(\frac{1}{2}\sin^2 x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

பகுதியின் கடைசிக்காரணி 4-க்குப் பிறகு 2 இறுதியாக வந்து $(m+n)\,(m+n-2)$ ...... பெருக்கத் தொடர் பூர்த்தியாகும்.

(b) m ஒற்றையும், n இரட்டையுமானல்,

$$\text{முடிவு} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx = -(\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

பகுதியின் கடைசிக் காரணி 3-க்குப் பிறகு 1-ல் முடியும்.

(c) m இரட்டையும், n ஒற்றையுமானல்

$$\text{முடிவு} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = (\sin x)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

பகுதியின் கடைசிக் காரணி 3-க்குப் பிறகு 1-ல் முடியும்.

(d) m, n இரண்டும் இரட்டையானல்

$$\text{முடிவு} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = (x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

பகுதியின் கடைசிக் காரணி 2-க்குப் பிறகு 2-ல் முடிந்து தொகுதியில் π சேரும்.

மேற்கூறியவற்றிலிருந்து சுருக்கமாக ஒரு விதி கூறலாம்.

விதி :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx = \frac{(m-1)(m-3) \ldots (n-1)(n-3) \ldots\ldots}{(m+n)(m+n-2) \ldots\ldots}$$

மூன்று பெருக்குத் தொடர்கள் ஒவ்வொன்றும் 2, 2 ஆகக்குறைந்து 2 அல்லது 1-ல் முடியும். m, n இரண்டும் இரட்டைப்படை எண்களானல் $\frac{\pi}{2}$ இறுதியில் பெருக்கும்.

குறிப்பு 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot dx$ இவற்றில் $m = 0$-ஐ இரட்டைப் படையாகக் கருதி m, n உள்ள பொது விதியைப் பயன்படுத்தலாம்.

எ. கா. 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cdot \cos^3 \theta \cdot d\theta = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{24}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta \cdot \cos^5 \theta \cdot d\theta = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{8}{693}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cdot \cos^6\theta \cdot d\theta = \frac{3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3\pi}{512}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta \cdot d\theta = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256}$$

எ. கா. 2

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta.$$

இங்கு $\sin^3\theta \cdot \cos^2\theta$-வின் மதிப்புகள் $0 - \frac{\pi}{2}$ எல்லைகட்குள்ளும் $\frac{\pi}{2} - \pi$ எல்லைகட்குள்ளும் சமம்.

குறியீடுகள் : முதல் கால்வட்டம் (+) (+), 2-வது கால்வட்டம் (+) (+)

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} \sin^3\theta \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cdot \cos^2\theta$$

$$= 2 \cdot \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{4}{15}$$

எ. கா. 3

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta \cdot d\theta.$$

$$Im, n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-1}\theta \cdot \cos^3\theta \cdot d\theta.$$

இங்கு $m = -1, n = +3$, (m ஒரு குறை எண்) $\therefore$ n-ஐ மட்டும் குறைக்க

$$I_{-1, 3} = \left[\frac{+1}{-1+3} (\sin\theta)^{-1+1} \cos^{3-1}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \frac{3-1}{-1+3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{-1} \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2\theta)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[0 - \tfrac{1}{2}\right] + \left[\log \sin\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4} + \left(\log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \log \sqrt{2} - \tfrac{1}{4}$$

மாற்றுமுறை :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta \cdot d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^2\theta)}{\sin\theta} \cdot d(\sin\theta)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta} \cdot d(\sin\theta) - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d(\sin\theta)$$

$$= (\log\sin\theta)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\log 1 - \log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \log\sqrt{2} - \tfrac{1}{4}$$

§ **26.** $\int \cos^m x \cdot \sin nx \cdot dx$ என்பதன் சுருக்க வாய்பாடு காண்க.

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \cdot d\,\frac{(-\cos nx)}{n}$$

$$= -\frac{1}{n}\cos^m x \cdot \cos nx - \frac{1}{n}\int \cos nx \cdot m\cos^{m-1} x \sin x \cdot dx$$

$$= -\frac{1}{n}\cos^m x\cdot\cos nx - \frac{m}{n}\int$$

$$\sin x\ dx$$

ஆனால், $\sin(n-1)x = \sin nx\cdot\cos x - \cos nx\cdot\sin x$ என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து,

$$\cos nx\cdot\sin x = \sin nx\cdot\cos x - \sin(n-1)x.$$

$$I\,m, n = -\frac{1}{n}\cdot\cos^m x\cdot\cos nx -$$

$$\frac{m}{n}\int\cos^{m-1}x\ [\sin x\cdot\cos x - \sin(n-1)x]dx$$

$$= -\frac{1}{n}\cos^m x\cdot\cos nx - \frac{m}{n}I m,n + \frac{m}{n}\ m-1, n-1$$

$$\left(1+\frac{m}{n}\right) I\,m, n = \frac{-1}{n}\cos^m x\cdot\cos nx$$

$$+\frac{m}{n}\cdot I_{m-1,\ n-1}$$

$$\therefore\ (m+n)Im,n = -\cos^m x\cdot\cos nx + I_{m-1,\ n-1}$$

குறிப்பு : இதுபோலவே $\int\cos^m x\cdot\cos nx\,dx$, $\int\sin^m x\cdot\sin nx\cdot dx$, $\int\sin^m x\cdot\cos nx\cdot dx$ இவற்றிற்கும் சுருக்க வாய்பாடு காணலாம்.

§ 27. (*a*) இதர கோண கணிதக் குறைப்புகள் :

(i) $\int\tan^n x\cdot dx$

$$In = \int\tan^n x\cdot dx = \int\tan^{n-2}x\,dx\tan^2 x\cdot dx$$

$$= \int\tan^{n-2}x(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int\tan^{n-2}x\cdot\sec^2 x\,dx - \int\tan^{n-2}x\,dx$$

$$= \int\tan^{n-2}x\cdot dx\cdot d(\tan x) - I_{n-2}$$

$$= \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$$

இறுதியில் n பூச்சியமெனில், $\int dx = x$: ஒன்றெனில்,

$\int\tan x\cdot dx = \log\sec x.$

(ii) $\int \cot^n x \cdot dx$

$$In = \int \cot^n x \cdot dx = \int \cot^{n-2} x \cdot \cot^2 x \cdot dx$$

$$= \int \cot^{n-2} x \cdot (\operatorname{cosec}^1 x - 1)\, dx$$

$$= \int \cot^{n-2} x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\, dx - I_{n-2}$$

$$= \int \cot^{n-2} x \cdot d(-\cot x) - I_{n-2}$$

$$= -\frac{1}{n-1} \cdot \cot^{n-1} x \cdot - I_{n-2}$$

இறுதியில் n பூச்சியமெனில் $\int dx = x$; n ஒன்றெனில் $\int \cot x\, dx = \log \sin x$.

(iii) $\int \sec^n x \cdot dx$

$$In = \int \sec^n x \cdot dx = \int \sec^{n-2} x \cdot d(\tan x)$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - \int \tan x\, (n-2) \sec^{n-3} x \sec x \cdot \tan x \cdot dx$$

$$= \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x\, (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2)\, In + (n-2)\, In_{-2}$$

$$\therefore \quad (n-2+1)\, In = \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2)\, In$$

$$In = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x - \frac{n-2}{n-1} \cdot In$$

இறுதியில் n பூச்சியமெனில் $\int dx = x$: n ஒன்றெனில்
$\int \sec x\, dx = \log(\sec x + \tan x)$

(iv) $\int \operatorname{cosec}^n x \cdot dx$

$$In = \int \operatorname{cosec}^{n-2} x \cdot dx\, (-\cot x)$$

$$= \operatorname{cosec}^{n-2} x \cdot \cot x + \int \cot x \cdot (n-2) \operatorname{cosec}^{n-3} x\, (-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x)\, dx$$

$$= -\operatorname{cosec}^{n-2} x \cdot \cot x - (n-2) \int \operatorname{cosec}^{n-2} x\, (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx$$

$$= -\operatorname{cosec}^{n-2} x \cdot \cot x - (n-2)\, In + (n-2)\, I_{n-2}$$

$$\therefore \quad (n-1)\, In = -\operatorname{cosec}^{n-2} x \cdot \cot x + (n-2)\, I_{n-2}$$

இறுதியில் n — பூச்சியமெனில் $\int dx = x$: n — ஒன்றெனில்
$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\log(\operatorname{cosec} x + \cot x)$$

எ. கா. 1.

$$\int \tan^4 x \cdot dx$$
$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \int \tan^2 x \cdot dx$$
$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \tfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$$

எ. கா. 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \cdot dx = \left(\frac{\tan^2 x}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot dx$$
$$= \tfrac{1}{2} - (\log \sec x)_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \tfrac{1}{2} - (\log \sqrt{2} - 0)$$
$$= \tfrac{1}{2} - \log \sqrt{2}$$

எ. கா. 3.

$$\int \sec^3 x \cdot dx = \int \sec x\, d(\tan x)$$
$$= \sec x \cdot \tan x - \int \tan^2 x \cdot \sec x \cdot dx$$
$$= \sec x \cdot \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \cdot dx$$
$$= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$
$$2\int \sec^3 x \cdot dx = \sec x \cdot \tan x + \log(\sec x + \tan x)$$
$$\therefore \int \sec^3 x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sec x \cdot \tan x + \tfrac{1}{2}\log(\sec x + \tan x)$$

எ. கா. 4.

$$\int \sec^6 x \cdot dx = \int \sec^4 x \cdot d(\tan x)$$

$$= \int (1 + \tan^2 x)^2 \cdot d(\tan x)$$

$$= \int (1 + i^2)^2\, dt \qquad \tan x = t$$

$$= \int (1 + 2t^2 + t^4)\, dt$$

$$= t + \frac{2}{3} t^3 + \frac{t^5}{5}.$$

எ. கா. 5.

$$\int \operatorname{cosec}^4 x \cdot dx = -\int \operatorname{cosec}^2 x \cdot d(\cot x)$$

$$= -\int (1 + u^2)\, du, \quad u = \cot x$$

$$= -u - \frac{u^3}{3} = -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3}$$

எ. கா. 6.

$$\int \operatorname{cosec}^5 x \cdot dx$$

$$= \int \operatorname{cosec}^3 x \; d(-\cot x)$$

வாய்பாடு $I_n = \dfrac{-1}{n-1} \operatorname{cosec}^{n-2} x \cdot \cot x + \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2}$

இங்கு $n = 5$

$$\therefore \quad I_5 = -\tfrac{1}{4} \cdot \operatorname{cosec} x \cdot \cot x + \tfrac{3}{4} I_3$$

$$= -\tfrac{1}{4} \operatorname{cosec}^3 x \cot x + \tfrac{3}{4} \left[-\tfrac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cdot \cot x + \tfrac{1}{2} I_1\right]$$

$$= -\tfrac{1}{4} \operatorname{cosec}^3 x \cot x - \tfrac{3}{8} \operatorname{cosec} x \cdot \cot x + \tfrac{3}{8} \int \operatorname{cosec} x \cdot dx$$

$$= -\tfrac{1}{4} \operatorname{cosec}^3 x \cdot \cot x - \tfrac{3}{8} \operatorname{cosec} x \cdot \cot x - \tfrac{3}{8} \log(\operatorname{cosec} x + \cot x)$$

§ **27.** (*b*) (i)

$$\int x^m (\log x)^n \, dx$$

$$I_{m,n} = \int (\log x)^n \cdot d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)$$

$$= (\log x)^n \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$- \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \, dx.$$

$$= (\log x)^n \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^n (\log x)^{n-1} \cdot dx.$$

$$= (\log x)^n \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1} \cdot I_{m,\,n-1}$$

இறுதியாக $I_{m,\,0} = \int x^m \cdot dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx \qquad (m > 0, n > 0)$

$$I_{m,\,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n \cdot dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^n \cdot d\,\frac{(x^{m+1})}{m+1}$$

$$= \left[(1-x)^n \frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1$$

$$- \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot n(1-x)^{n-1}(-1)\, dx$$

$$= 0 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 (1-x)^{n-1} \cdot x^m (-x) \cdot dx$$

$$= -\frac{n}{m+1} \int_0^1 (1-x)^{n-1} \cdot x^m (\overline{1-x} - 1) \; dx$$

$$= \frac{-n}{m+1} \int_0^1 (1-x)^n \cdot x^m \, dx +$$

$$\frac{n}{m+1} \int_0^1 (1-x)^{n-1} \cdot x^m \cdot dx$$

$$= \frac{-n}{m+1} Im, n + \frac{n}{m+1} Im, n-1$$

$$\left(1 + \frac{n}{m+1}\right) In = \frac{n}{m+1} \cdot Im, n-1$$

$$\frac{m+n+1}{m+1} Im, n = \frac{n}{m+1} Im, n-1$$

$$\therefore \quad Im, n = \frac{n}{m+n+1} Im, n-1$$

தொடர, $Im, n = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 1}{(m+n+1)(m+n) \ldots\ldots m+2} Im, 0$

$$Im, 0 = \int_0^1 x^m \, dx = \left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

$$\therefore \quad Im, n = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 1}{(m+n+1)(m+n) \ldots\ldots (m+2)} \cdot \frac{1}{(m+1}$$

$$= \frac{\angle n \ \angle m}{\angle m+n+1}$$

எ. கா. 1.

$$\int x^4 \cdot (\log x)^3 \, dx$$

வாய்பாடு, $Im, n = (\log x)^n \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1} Im, n-1$

இங்கு $m = 4,\ n = 3$

$$\therefore I\ (4, 3) = (\log x)^3 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{3}{5} \left[(\log x)^2 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{2}{5} I_1 \right]$$

$$= \frac{x^5}{5} (\log x)^3 - \frac{3}{25} x^5 \cdot (\log x)^2$$

$$+ \frac{6}{25}\left[\frac{x^5}{5} \log x - \frac{1}{5} I_0 \right]$$

$$= \frac{x^5}{5} (\log x)^3 - \frac{3}{25} x^5 (\log x)^2$$

$$+ \frac{6}{125} x^5 (\log x) - \frac{6}{125} \cdot \frac{x^5}{5}$$

$$= x^5 \left[\frac{(\log x)^3}{5} - \frac{3}{25} (\log x)^2 + \frac{6}{125} (\log x) - \frac{6}{625} \right]$$

எ. கா. 2.

$In = \int (\log x)^n \cdot dx$ என்றால் $In + n \cdot I_{n-1} = x \cdot (\log x)^n$ எனக் காண்க. இதனைப் பயன்படுத்தி

$\int_1^e (\log x)^2 \, dx$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$In = \int (\log x)^n \cdot d(x) = x(\log x)^n - \int x\,n\,(\log x)^{n-1} \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= x(\log x)^n - n \cdot I_{n-1}$$

$$\therefore \quad In + n \cdot I_{n-1} = x \cdot (\log x)^n \qquad \ldots(1)$$

$$\int_1^e (\log x)^2\, dx = I_2 \quad (n = 2)$$

(i) லிருந்து, $I_2 + 2\, I_1 = [x(\log x)^2]_0^e$,

$$= e(\log e)^2 - |\log|$$
$$= e \qquad \text{(ii)}$$

$$I_1 = \int_1^e (\log x)\, dx$$

$$= (x \cdot \log x)_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= e \cdot 1 - (x)_1^e = e - (e-1) = 1$$

$\therefore$ (ii)லிருந்து $I_2 + 2 \times 1 = e \quad \therefore I_2 = e - 2$

எ. கா. 3.

$\int_0^1 x^2 (1 - x^3)^n\, dx = In$ என்றால்

$(n+1)\; In = n\; I_{n-1}$ என நிறுவுக.

$$In = \int_0^1 (1 - x^3)^n \cdot d\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \left[(1-x)^3 \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} n(1-x^3)^{n-1}(-3x^2)\,dx$$

$$= + n \int_0^1 x^3 (1 - x^3)^{n-1} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$= - n \int_0^1 (1 - x^3 - 1)(1 - x^3)^{n-1} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$= - n \int_0^1 (1 - x^3)^n x^2 \, dx + n \int_0^1 (1 - x^3)^{n-1} x^2 \, dx$$

$$= - n \cdot In + n \cdot I_{n-1}$$

$$(1 + n) In = n \cdot I_{n-1} \qquad \therefore \; In = n \cdot \frac{I_{n-1}}{(n+1)}$$

எ. கா. 4.

$$\int_0^a \frac{x^n}{e^x} \cdot dx = In$$ என்றால்

$In - (n + a) \; I_{n-1} + a(n - 1) \; I_{n-2} = 0$ என நிறுவுக.

$$In = \int_0^a x^n \cdot e^{-x} \cdot dx = \int_0^a x^n \cdot d(-e^{-x})$$

$$= -(x^n \cdot e^{-x})_0^a + \int_0^a e^{-x} \cdot nx_{n-1} \cdot dx$$

$$= - a^n \cdot e^{-a} + n \, I_{n-1} \qquad \ldots(1)$$

அதுபோலவே

$$I_{n-1} = - a^{n-1} \cdot e^{-a} + (n - 1) I_{n-2}$$

$$\therefore \; a I_{n-1} = - a^n \cdot e^{-a} + a(n - 1) I_{n-2} \qquad (2)$$

$$(1) - (2), \quad In - a I_{n-1} = n \cdot I_{n-1} - a(n-1) \cdot I_{n-2}$$

$$\therefore \; In - (n + a) I_{n-1} + a(n - 1) I_{n-2} = 0$$

எ. கா. 5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cdot \cos nx \cdot nx = f(m, n)$$

என்றால் $f(m, n) = \frac{m}{m+n} f(m-1, n-1)$ எனக் காட்டுக.

அதைக் கொண்டு $f(n, n) = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ என்று காண்க.

$$1. \quad f(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cdot \cos nx \cdot dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cdot d\, \frac{(\sin nx)}{n}$$

$$= \left[\frac{1}{n} \cos^m x \cdot \sin nx \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$- \frac{1}{n} \int \sin nx \cdot m \cos^{m-1} x\, (-\sin x) dx$$

$$= 0 + \frac{m}{n} \int \cos^{m-1} x \cdot \sin nx \cdot \sin x\, dx$$

ஆனல் $\cos (n-1)n = \cos nx \cdot \cos x + \sin nx \cdot \sin x$

$$\therefore \quad \sin rx \cdot \sin x = \cos (n-1)n - \cos nx \cdot \cos x$$

$$\therefore \quad f(m, n) = \frac{m}{n} \int \cos^{m-1} x.$$

$$(\cos \overline{n-1}\, x - \cos nx \cdot \cos x) dx$$

$$= \frac{m}{n} f(m-1, n-1) - \frac{m}{n} f(m, n)$$

$$\therefore \left(1+\frac{m}{n}\right) f(m, n)=\frac{m}{n} f(m-1, n-1)$$

$$f(m, n)=\frac{m}{m+n} f(m-1, n-1)$$

2. $m = n$ என்றால்

$$f(m,n)=\frac{n}{2n} f(n-1, n-1)=\frac{1}{2} f(n-1, n-1)$$

$$=\frac{1}{2^2} f(n-2, n-2)$$

$$=\frac{1}{2^n} \cdot f(0, 0)$$

$$=\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{1}{2^n}(x)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n}=\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

பயிற்சிகள் 25

மதிப்பு காண்க :

1. $\int x^4 \sin x \cdot dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \cdot dx$
3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^4 x \cdot dx$
4. $\int_0^{\pi} x \cdot \cos^4 x \cdot dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^5 x \cdot dx$
6. $\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$

7. $\int_0^1 x^3 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$ 8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x \cdot dx$

9. $\int_0^\infty e^{-x} \cdot \sin^m x \cdot dx$-க்கு ஒரு சுருக்க வாய்பாடு கண்டு,

$\int_0^\infty e^{-x} \cdot \sin^4 x \, dx$ ஐ மதிப்பிடுக.

10. $\int e^{ax} \cdot \cos^n x \cdot dx$-க்கு ஒரு சுருக்க வாய்பாடு காண்க.

அதைக் கொண்டு $\int_0^\infty e^{-x} \cdot \cos^3 x \cdot dx$-ஐ மதிப்பிடுக.

11. $\phi(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin^n\theta \cdot d\theta$ விற்கு ஒரு சுருக்க வாய்பாடு கண்டு $\phi(5)$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cdot \sin x \cdot dx = U_n$ என்றால்,

$U_n + n(n-1)\, U_{n-2} = n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$ என நிறுவி, அதைக் கொண்டு U_5-ஐ மதிப்பிடுக.

13. $n > 1,\ U_n = \int_0^\infty x^n \cdot e^{-x^2} dx$ என்றால்,

$U_n = \frac{1}{2}(n-1)\, U_{n-2}$ எனவும், $U_{2n+1} = \frac{n}{2}!$ எனவும் நிறுவுக.

14. $I_n = \int_0^1 x^p (1 - x^q)^n \cdot dx$ என்றால்,

$(nq + p + 1) I_n = nq\, I_{n-1}$ எனக் காட்டுக.

15. m, n மிகை முழு எண்களெனில்

$x = a + (b - a) Y_{m+n+1}$ எனப் பிரதியிட்டு

$$\int_a^b (x-a)^m \cdot (b-x)^n \cdot dx = \frac{m!n!\,(b-a)}{(m+n+1)!}$$

என நிறுவுக.

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cdot \sin nx\, dx = f(m, n)$ என்றால்,

$f(m, n) = \frac{1}{m+n} + \frac{m}{m+n} f(m-1, n-1)$ என நிறுவுக.

இதைக் கொண்டு $f(m, n) = \frac{1}{2^{m+1}}\left[\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^m}{m}\right]$

எனக் காண்க.

17. மதிப்பிடுக :

(a) $\int x^4 (\log x)^3\, dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta \cdot \cos^4\theta\, d\theta$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{16}\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$

(d) $\int \sin^8\theta \cdot \cos^8\theta \cdot d\theta$

(e) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^3}$

(f) $\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

(g) $\int_0^1 \frac{x^3 \cdot \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

9. வரையறுத்த தொகை (Definite Integral)

28. தொகையீடு ஒரு கூட்டுத்தொகையாகும் (Integration as Summation)

வரையறை :

முற்பகுதியில் தொகையீட்டை வகைக்கெழுவின் எதிர்மாற்ற மென்று பொருட்கொண்டு விளக்கினோம். இப்பகுதியில் அதைக் கூட்டுத்தொகை அல்லது கூடுதல் (summation) என்ற பொருளில் விளக்குவோம்.

$f(x)$ என்பது ஒரு x-ன் சார்பென்றும், $x = a$, $x = b$ $(b > a)$ என்ற இரு மதிப்புகளுக்கும் அவற்றிற்கிடையே யுள்ள எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x)$ தொடர்ச்சியாக முடிவுள்ள மதிப்புகளைப் பெற்றதென்றும் கொள்வோம். இடைவெளி $(b - a)$-ஐ $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$ ...... $b - x_n - 1$ என்ற n எண்ணிக்கையுள்ள நுண்பகுதிகளாகப் பிரிப்போம். இப்போது,

$(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + (x_3 - n_2) f(x_2) + \dots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையானது, நுண்பகுதிகளொவ்வொன்றும் 0 எல்லையை நாடும் போது, ஒரு முடிவுள்ள எல்லை மதிப்பை நாடினால், இவ்வெல்லை மதிப்பை (a, b) இடைவெளியில் x-ஐ யொட்டிய $f(x)$ சார்பின் தொகையென்கிறோம். இத்தொகையை

$$\int_a^b f(x)\, dx \text{ என்று குறிக்கின்றோம்.}$$

$$\therefore \int_b^b f(x)\, dx = \underset{(x_i - x_{i-1})}{\text{எல்லை}} \sum_1^n \left\{ (x_i - x_{i-1}) f(x_{-1}) \right\}$$

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்குள் $\int_a^b f(x)\,dx$ என்ற கூட்டுத் தொகை, பொதுவாக ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லை மதிப்பை நாடுமென்பது கண்கூடு.

(a, b) எல்லைக்குள் $f(x)$-ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் முறையே G, L என்றால்

$$L \sum_1^n (x_r - x_{r-1}) \leq \sum_1^n f(x_{r-1})(x_r - x_{r-1})$$

$$\leq G \sum_1^n (x_r - x_{r-1})$$

அதாவது

$$L(b-a) \leq \sum_1^n f(x_{r-1})(x_r - x_{r-1}) \leq G(b-a)$$

$\therefore$ தொடர் $\sum_1^n f(x_{r-1})(x_r - x_{r-1})$-ன் கூட்டுத் தொகை $L(b-a)$, $G(b-a)$ இவற்றிற்கிடைப்பட்ட முடிவுள்ள மதிப்பாகும்.

அறிதல் : வரையறுத்த தொகை யென்பது ஒரு தொடர்க் கூட்டலின் எல்லையாகும்.

குறிப்பு : 1. வரையறைத் தொகைகளைத் தொடர்களின் கூடுதலாகத் தொகை காண்பது எளிதல்ல பெரும்பாலான சார்புகளுக்கு இம் முறையில் கூடுதல் காண்பது நடைமுறையில் இயலாதது.

எ. கா. 1.

சார்பு $f(x) = x$-ன் தொகையை, (a, b) இடை வெளியில் காண்க.

$$x_1 - a = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots\ldots = b - x_{n-1}$$
$$= h \text{ என்போம்.}$$

$$\therefore \quad x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \ldots,\ x_{n-1} = a + (n-1)h,$$
$$b = a + nh.$$

வரையறைப்படி (By definition)

$$\int_a^b f\ (x)\,dx = \int_a^b x \cdot dx.$$

$$= \underset{(x_r - x_{r-1}) \to 0}{\text{எல்லை}} \left[(x_1 - a)\ f\ (a) + (x_2 - x_1) f\ (x_1) + \ldots\ldots + (b - x_{n-1})\ f(x_{n-1}) \right]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \left[h\ (a) + h\ (a + h) + h\ (a + 2h) + \ldots\ldots + h\ (a + \overline{n-1}\ h) \right]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \left[nh\,a + h^2\ (1 + 2 + 3 \ldots\ldots + \overline{n-1}) \right]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \left[(b - a)\ a + h^2 \frac{(n-1)n}{2} \right],\ nh = b - a$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \left[(b - a)a + \frac{n^2 h^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \right]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \left[(b - a)a + \frac{(b - a)^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= (b - a)\,a + \frac{(b - a)^2}{2} = (b - a)\left[a + \frac{b - a}{2} \right]$$

$$\because \quad h \to 0 \text{ எனில் } n \to \infty$$
$$\frac{1}{n} \to 0.$$

$$= \frac{(b - a)\ (b + a)}{2} = \frac{1}{2}\ (b^2 - a^2)$$

எனவே,

$$h \to 0 \text{ எனும்போது, } n \to \infty, \frac{1}{n} \to 0$$

$$\text{தொகை} \int_a^b x \cdot dx = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

குறிப்பு 2. மேற்கண்ட வரையறையில் $f(x)$-ன் மதிப்பை ஒவ்வொரு இடைவெளியின் தொடக்கங்களில் எடுத்துக் கொண்டோம். இதை விடுத்து, ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் $f(x)$-ஐ எங்கெடுத்தாலும், அல்லது முடிவுகளெடுத்தாலும் தொடர் கூடுதலின் எல்லை மதிப்பு ஒன்றே என்று எளிதில் காட்டலாம்.

எ. கா. 2.

$\int_a^b e^x\, dx$-ன் மதிப்பைத் தொடர் கூடுதலாகக் காண்க.

$$\text{வாய்பாடு, } \int_a^b f(x)\, dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h \sum_1^n f(x_{r-1})$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h \sum_1^n f(a + \overline{r-1}\, h)$$

$b - a = nh$ என்றால்

$$\therefore \int_a^b e^x\, dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h \left[e^a + e^{a+h} + e^{a+2h} + \ldots\ldots e^{a+\overline{n-1}h} \right]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h \cdot e^a \left[1 + e^h + e^{2h} \ldots + e^{\overline{n-1}\,h}\right]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h \cdot e^a \cdot \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{e^h - 1} \cdot e^a (e^{b-a} - 1)$$

$$= e^a (e^{b-a} - 1) \qquad \because \lim_{h \to 0} \frac{h}{e^h - 1} = 1$$

$$= e^b - e^a$$

எ. கா. 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h \sum_{r=1}^{n} \cos (r-1)h$$

இங்கு $nh = \frac{\pi}{2}$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h \left[\cos 0 + \cos h + \cos 2h + \ldots + \cos \overline{n-1}\, h \right]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h \left\{ \frac{\cos \frac{(n-1)h}{2} \cdot \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \right\}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ 2 \left\{ \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \right\} \cdot \cos \frac{(nh - h)}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ 2 \left\{ \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \right\} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{h}{2} \right) \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

எ. கா. 4.

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+h)^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(a + \overline{n-1}\, h)^2} \right]$$

$$> \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\; h\left[\frac{1}{a(a+h)} + \frac{1}{(a+h)(a+2h)} + \cdots \cdots + \frac{1}{(a+\overline{n-1}h)\;(a+nh)}\right]$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} > \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\; \frac{h}{h}\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+h}\right) + \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a+2h}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{a+\overline{n-1}\,h} - \frac{1}{a+nh}\right)\right]$$

$$> \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+nh}\right]$$

$$> \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \qquad \because\ a + nh = b \qquad \ldots \text{(i)}$$

தவிர, $$\int_a^b \frac{dx}{x^2} < \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\; h\left[\frac{1}{(a-h)a} + \frac{1}{a(a+h)} + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{b-2h} - \frac{1}{b-h}\right)\right]$$

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx < \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\left[\frac{1}{a-h} - \frac{1}{b-h}\right]$$

$$< \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \qquad \ldots \text{(ii)}, \qquad h \to 0$$

(i), (ii) லிருந்து, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

எ. கா. 5.

$$\int_a^b x^m \cdot dx, \quad m \neq 1$$

இங்கே $\underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{(y+h)^{m+1} - y^{m+1}}{h} = (m+1)\, y^n$ என அறிவோம்.

$$\therefore \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\, hy^n = \frac{1}{m+1}[(y+h)^{m+1} - y^{m+1}] \quad \dots (A)$$

எனவே,

$$\int_a^b x^m \cdot dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\, h\, [a^m + (a+h)^m + \dots$$

$$+ (a + \overline{n-1}\, h)^m]$$

(A)-ல் $y = a, a+h \dots a + \overline{n-1}\, h$ எனப் பிரதியிட,

$$\int_a^b x^m \cdot dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{m+1}\Big[\{(a+h)^{m+1} - a^{m+1}\}$$

$$+ \{(a+2h)^{m+1} - (a+h)^{m+1}\}$$

$$+ \dots + \{(a+nh)^{m+1} - (a+\overline{n-1}\, h)^{m+1}\}\Big]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{m+1}[(a+nh)^{m+1} - a^{m+1}]$$

$$= \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}), \quad a + nh = b$$

பயிற்சிகள் 26

தொடர்க் கூட்டலாகத் தொகை காண்க.

1. $\int_a^b x^2 \cdot dx$ 2. $\int_1^2 x^3 \cdot dx.$

3. $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx.$ 4. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$

5. $\int_a^b e^{-x} \cdot dx$ 6. $\int_0^1 e^{3x} \cdot dx$

§ 29. தொடர்களின் கூட்டல் (Summation of Series)

$f(x)$-ன் மதிப்பை இடைவெளிகளின் இறுதியில் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h\ [f(a+h) + f\ (a+2h) + \dots + f\ (a+nh)]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h \sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$$

இங்கு $n \to \infty$ எனும் போது $a + rh = b \quad \therefore \quad nh = b - a$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left[a + \frac{r(b-a)}{n}\right]$$

மாற்றி எழுத, $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} f\left[a + \frac{r(b-a)}{n}\right]$

$$= \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx.$$

இதில் $x = a + (b - a)\, y$ எனப் பிரதியிட,

$x = a$ எனில், $y = 0$; $x = b$ எனில் $y = \frac{b-a}{b-a} = 1$

$$dx = (b - a)\, dy$$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left[a + (b - a)\frac{r}{n}\right]$$

$$= \frac{b-a}{b-a} \int_0^1 f(a + \overline{b - a}y)\, dy.$$

$$= \int_0^1 f(a + \overline{b - a}\, x)\, dx,$$

மாறி y-ன் இடத்தில் x

இங்கு $a = 0$, $b = 1$ எனப்பிரதியிட்டால்,

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx \text{ எனவாகும்.}$$

குறிப்பு 1 : இடது பக்கத் தொடரிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $n \to \infty$ எனும் போது 0 எல்லையை நாடுவதால் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள சில உறுப்புகளைக் குறைப்பதாலோ அல்லது கூட்டுவதாலோ எல்லை மதிப்பு மாருது.

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)\right]$$

$$= \underset{n \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{r}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

குறிப்பு (1) ஐ வாய்பாடாகக் கொண்டு தொடர்க் கூட்டு எல்லை மதிப்பைத் தலைகீழ் மாற்ற முறையில் (Inverse of differentiation) காணலாம்.

தொடரைத் தொகை காணும் அமைப்பிற்கு மாற்றும் முறை :

(i) தொடரின் பொது உறுப்பைத் தெரிந்து பின்னர் அதை $\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ என்ற அமைப்பில் மாற்றவேண்டும். r-க்கு $1, 2, 3, \ldots n$ அல்லது $0, 1, 2 \ldots n-1$ மதிப்புகளிட n உறுப்புகளும் வரும்.

(ii) $\frac{r}{n} = x, \frac{1}{n} = dx$ எனவாகும்.

$n \to \infty$ எனவாகும் போகும் $dx \to 0$ ஆனால்

$n \cdot dx =$ மேல், கீழ் எல்லைகட்குட்பட்ட இடைவெளி.

எ. கா. 1.

நிறுவுக.

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right] = \log 2.$$

பொது உறுப்பு $\frac{1}{n+r} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{r}{n}}\right]$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{r}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx.$$

$$= \left[\log(1+x)\right]_0^1$$

$$= \log 2.$$

எ. கா. 2.

திறுவுக.

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left[\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n+3)^{\frac{3}{2}}}+\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n+6)^{\frac{3}{2}}}+\dots\right.$$

$$\left.+\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n+3)(n-1)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{1}{3}$$

$$\text{பொது உறுப்பு}=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n+3r)^{\frac{3}{2}}}=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{3r}{n}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{n\left(1+\frac{3r}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n=1}\frac{1}{\left(1+\frac{3r}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^1\frac{dx}{(1+3x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{2}{3(1+3x)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{4}}-1\right]$$

$$=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

எ. கா. 3.

திறுவுக.

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\frac{1}{n}\left[\sin^{2k}\left(\frac{\pi}{2n}\right)+\sin^{2k}\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\right.$$

$$\left.+\dots\dots+\sin^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\angle 2k}{2^{2k}(\angle k)^2}$$

$$\text{பொது உறுப்பு}=\frac{1}{n}\sin^{2k}\cdot\frac{r\pi}{2n}=\frac{1}{n}\sin^{2k}\left(\frac{\pi r}{2n}\right)$$

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \sin^{2k}\left(\frac{\pi r}{2n}\right) = \int_0^1 \sin^{2k}\frac{\pi}{2}x \cdot dx$$

$\frac{\pi}{2}x = u$ என்றால் $\frac{\pi}{2}dx = du$

$x = 0$ என, $u = 0$; $x = 1$ என $u = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_0^1 \sin^{2k}\frac{\pi}{2}x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} u \cdot \frac{2}{\pi}du$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots1}{(2k)(2k-2)\ldots2} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots1}{2^k \angle k}$$

$$= \frac{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)\ldots1}{2k \angle k\, 2k(2k-2)(2k-4)\ldots2}$$

$$= \frac{\angle 2k}{2^{2k}(\angle k)^2}$$

எ. கா. 4.

நிறுவுக.

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= 2e^{\frac{\pi-4}{2}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$= L$ என்போம்.

$$\log L = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{n}\left[\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\log\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right) + \ldots\ldots + \log\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\log\left[1+\left(\frac{r}{n}\right)^2\right]$$

$$= \int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$$

$$= \Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1 - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}2x\cdot dx$$

$$= \log 2 - 2\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \log 2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \log 2 - 2 + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \left(\log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore L = e^{\left(\log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= e^{\log 2} \times e^{\frac{\pi-4}{2}}$$

$$= 2\cdot e^{\frac{\pi-4}{2}}$$

பயிற்சிகள் 27

நிறுவுக.

1. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{3n}\right] = \log^{3}$

2. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - r^2}} = \frac{\pi}{6}$

3. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{n^3} \left[1 + 4 + 9 + \ldots\ldots + n^2\right] = \frac{1}{3}$

4. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{8n}\right] = \frac{3}{8}$

5. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{1+n^3} + \frac{4}{8+n^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}\right] = \frac{\log 2}{3}$

6. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{3n+n}\right] = \log\frac{4}{3}$

7. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \ldots\ldots + \sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{3} - 1\right)$

8. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2 - 1^2} + \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2 - 2^2} + \ldots\ldots \text{ to } n \text{ terms}\right] = \frac{\pi}{4}$

9. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \ldots\ldots \text{ to } n \text{ terms}\right] = \frac{1}{2}\log 2$

மதிப்பிடுக :

10. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - r^2}}$ 11. $\sum_{1}^{n} \frac{n+r}{n^2+r^2}$

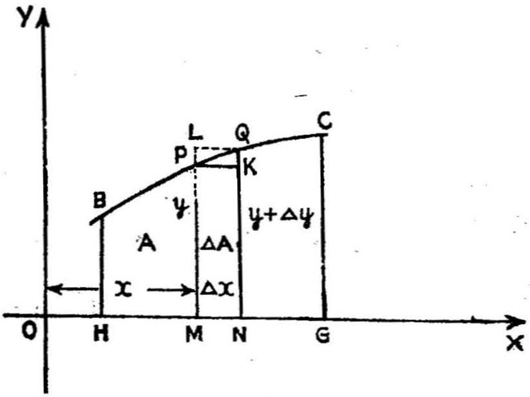
12. $\left[\pi_1^n \left(1 + \frac{r}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$ 13. $\sum_{1}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n+r}{n-r}}$

14. $\sum_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2rn - r^2}}$

15. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{n+2}$
$+ \dots\dots + \frac{1}{2n}$ என நிறுவுக.

16. $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n}\right]$-ன் மதிப்பைக் கண்டு $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots\dots \infty$ என்ற தொடரின் தொகையை மதிப்பிடுக.

§ 30. (*a*) பரப்பளவு காணல் :



படம் 2

$y = f(x)$ என்ற ஒரு வளைவரையின் பகுதி BC. வில் BC-க்கு B, C புள்ளிகளிலிருந்து வரைந்த குத்தாயங்களுக்கும் x-அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பளவைத் தொகையிடல் முறையில் காண்போம்

BC-யின் மேல் P என்ற ஏதேனுமொரு புள்ளி (x, y)-யைக் குறித்து அதன் குத்தாயம் MP வரை வளைவரைக்கும் B, P புள்ளி களின் குத்தாயங்களுக்கும் x அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பளவை A என்போம்.

P என்ற புள்ளி வில்லின் மேல் நகரும்பொழுது A அதிகரிக் கும். x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் இசைந்த மதிப்பை A பெறும். ஆகையால் A-யானது x-ன் சார்பாகும்.

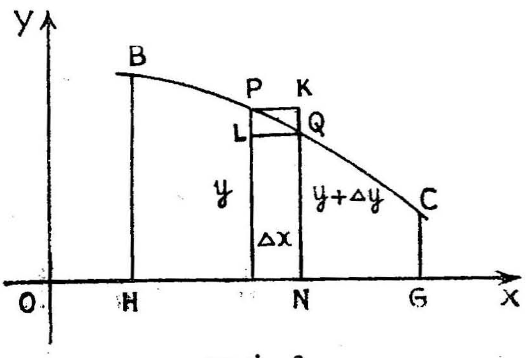
x-ன் மதிப்பு $x + \triangle x$ ஆக அதிகரிக்கும் போது A-ன் மதிப்பு $A + \triangle A$ ஆக அதிகரிக்கும். $x + \triangle x$-ன் குத்தாயம் NQ எனில் அதாவது MP, NQ-க்கு நகர்ந்தபோது $\triangle A$ பரப்பளவு $PMNQ$ ஆகும்.

NQ-க்குச் செங்குத்தாக PK-ஐயும், MP-க்குச் செங்குத்தாக QL-ஐயும் வரை. P, Q புள்ளிகளுக்கிடையே வில்லின் சாய்வு மிகை $(+)$ யெனில்

$$\text{பரப்பளவு } PMNQ > \text{நீள் சதுரம் } PMNK$$
$$< \text{நீள் சதுரம் } LMNQ$$
$$ie\ \triangle A > y \cdot \triangle x$$
$$< (y + \triangle y) \cdot \triangle x$$

$\triangle x$-ஆல் வகுக்க

$$y < \frac{\triangle A}{\triangle x} < y + \triangle y$$



படம் 3

$$\triangle x \to 0 \text{ எனும்போது}, \triangle y \to 0,$$
$$y + \triangle y \to y$$

எல்லை $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA}{dx}$. $\therefore \frac{dA}{dx} = y$ எனவாகும்.

$$\therefore \quad A = \int y \cdot dx = \int f(x) \cdot dx$$

P, Q புள்ளிகளுக்கிடையே வில்லின் சாய்வு குறை (—) யானல்

$$y > \frac{\Delta A}{\Delta x} > y + \Delta y$$

$\Delta x \to 0$ எனும்போது முன்புபோலவே

$$\frac{dA}{dx} = y$$

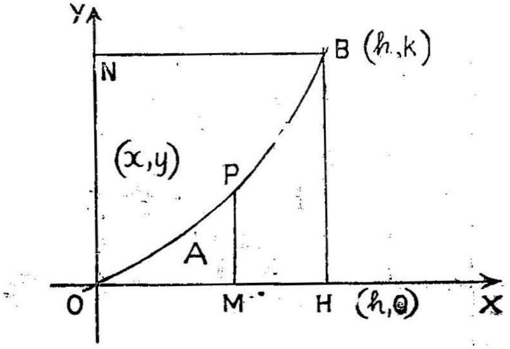
குறிப்பு: BC வில்லிற்கும், B, C புள்ளிகளிலிருந்து y அச்சுக்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோடுகளுக்கும் y அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பளவை $\frac{dA}{dy} = x$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து தொகையிட்டுக் காணலாம்.

$$A = \int x \cdot dy$$

எ. கா. 1

$ay = x^2$ என்ற பரவளைவிற்கும், x அச்சுக்கும், $x = h$ என்ற குத்தாயத்திற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

$0PM$-ன் பரப்பளவை A என்போம்.



படம் 4

$$\frac{dA}{dx} = \int y = \frac{x^2}{a}$$

$$\therefore \quad A = \int \frac{x^2}{a} \cdot dx$$

$$= \frac{x^3}{3a} + C$$

$x = 0$ எனும்போது P ஆதியிலிருக்கும்.

$$\text{பரப்பளவு } OPM = 0 = A$$

$$\therefore \quad 0 = 0 + C \quad ie\ C = 0$$

$$\therefore \quad OPM\text{-ன் பரப்பளவு} = \frac{x^3}{3a}$$

P புள்ளி B-க்கு நகரும்போது $x = h$

$$\therefore \quad OBH\text{-ன் பரப்பளவு} = \frac{h^3}{3a}$$

$ay = x^2$-ல் $x = h$, $y = k$ எனப்பிரதியிட

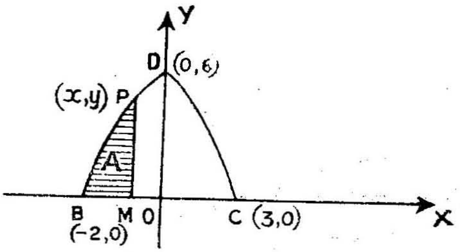
$$ak = h^2 \qquad \therefore \quad a = \frac{h^2}{k}$$

$$\therefore \quad \text{பரப்பளவு } OBH = \frac{h^3}{3 \times \frac{h^2}{k}} = \frac{kh}{3}$$

$$= \tfrac{1}{3} \text{ நீள் சதுரம் } OHBN$$

எ. கா. 2

$y = 6 + x - x^2$ என்ற பரவளைவிற்கும் x அச்சுக்கும் இடையேயுள்ள பரப்பளவைக் காண்க.



படம் 5

பரவளைவு $y = 6 + x - x^2 = (3 - x)(2 + x)$

$x = -2$ எனும்போது
$= 3$

$$y = 0$$

$\therefore$ வளைவரை x அச்சை $(-2, 0)$; $(3, 0)$ எனும் புள்ளிகளில் வெட்டும். $x = 0$ எனில் $y = 6$ $\therefore$ y அச்சை $(0, 6)$ புள்ளியில் வெட்டும்.

OPM-ன் பரப்பு A என்போம்.

$$\frac{dA}{dx} = y = 6 + x - x^2$$

$$\therefore \quad A = \int y \cdot dx = 6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$$

$x = -2$ என்ற மதிப்பிற்கு P புள்ளி B-யிலிருக்கும். அப்போது $OPM = 0 = A$

$$\therefore \quad 0 = -12 + \tfrac{4}{2} + \tfrac{8}{3} + C = -10 + \tfrac{8}{3} + C$$

$$\therefore \quad C = \tfrac{22}{3}$$

இப்போது பரப்பு BPM, $A = 6x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{22}{3}$

$x = 3$ என்றிட $\quad A = 18 + \tfrac{9}{2} - \tfrac{27}{3} + \tfrac{22}{3}$

$$= 20\tfrac{5}{6}$$

$\therefore$ வளைவரைக்கும் x அச்சுக்குமிடையே உள்ள

பரப்பளவு $= 20\frac{5}{6}$

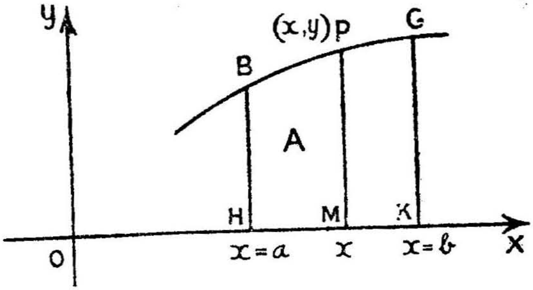
குறிப்பு : 1. வளைவரை x-அச்சுக்குக் கீழாக (குறையும் பக்கம்) இருப்பின், அதாவது $y = x^2 - x - 6$ என்ருல் பரப்பளவு $= -20\frac{5}{6}$, குறையாகும் (negative).

2. தொகை காணும் போது தோன்றும் மாறிலி பரப்பளவு ஆரம்பிக்கும் குத்துக் கோட்டின் இடத்தைப் பொறுத்தது.

3. குத்துக்கோடு $x = a$ என்ருல், a-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் C-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

§ 30. (*b*) வரையறுத்த தொகை (Definite Integral)

$y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கும், $x = a, x = b$ என்ற குத்தாயங்களுக்கும் x-அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பளவைக் காண்போம்.



படம் 6

பரப்பு $BHMP = A$ என்க. வாய்பாட்டின்படி

$$\frac{dA}{dx} = y = f(x)$$

$$\therefore \quad A = \int f(x)\, dx.$$

$F(x)$ என்ற சார்பின் வகைக்கெழு $f(x)$ எனில் பரப்பு $BHMP$,
$A = F(x) + C$, C ஒரு மாறிலி ... (i)

ஆனால் பரப்பு $x = a$-யிலிருந்து அளக்கப்படுகிறது.

$\therefore$ (i)-ல் $x = a$ என $A = 0$ ஆகும்.

இம் மதிப்புகளை (i)-ல் இட $0 = F(a) + C$

$\therefore \quad C = -F(a)$

$\therefore$ பரப்பு $BHMP$, $A = F(x) - F(a)$ ... (ii)

P நகர்ந்து C-ஐ அடைந்தால், C-யின் குத்துக் கோடு $x = b$.

(ii)-ல் $x = b$ என இட்டால்

பரப்பு $BHKC$, $A = F(b) - F(a)$ ... (iii)

இங்கு $f(x)$ சார்பின் வரையறுக்கப்படாத தொகை (Indefinite Integral) $F(x)$. இதில் x-க்கு b, a என்ற மதிப்புகளை முறையே யிட்டுப் பெற்ற தொகைகளின் வேறுபாடு $F(b) - F(a)$,

இம்முறையைச் சுருக்கமாக

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \Big[F(x) \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

a, b எல்லைக்குள் x-ஐ ஒட்டி $f(x)$-ன் தொகையீடு எனக் கூறுகிறோம்.

$\int_a^b f(x)\, dx$ என்பது வரையறுத்த தொகை (Definite Integral) எனப்படும். a, b என்பன முறையே கீழ் எல்லை, மேல் எல்லைகளாகும்.

குறிப்பு : மேல் எல்லைத் தொகையினின்றும் கீழ் எல்லைத் தொகையைக் கழிக்குங்கால் தொகை காணும் போது தோன்றும் மாறிலிகள் கழிந்து விடுவதாகக் கொள்க.

எ. கா. 1.

§ 30 (a)-வில் எ. கா. 2-ஐ $x = -2$, $x = 3$ என்ற எல்லைகளுக்குள் தொகையீடு (வரையறுத்த தொகை) காண்க.

$$A = \int_{-2}^{3} (6 + x - x^2)\, dx$$

$$= \left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{3}$$

$$= \left[6 \cdot 3 + \frac{9}{2} - \frac{27}{3} \right] - \left[6(-2) + \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right]$$

$$= (18 + \tfrac{9}{2} - 9) - (-12 + 2 + \tfrac{8}{3})$$

$$= 13\tfrac{1}{2} - (-7\tfrac{1}{3}) = 20\tfrac{5}{6}$$

எ. கா. 2.

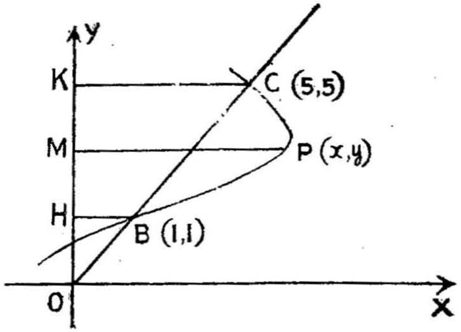
$x = 7y - 5 - y^2$ என்ற பரவளைவிற்கும் $y = x$ என்ற நேர் கோட்டிற்குமிடையிலடங்கும் பரப்பளவைக் காண்க.

$x = 7y - 5 - y^2$

$y = x$ என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க (Solving)

$y = 7y - 5 - y^2$

$y^2 - 6y + 5 = 0$



படம் 7

$(y - 1)(y - 5) = 0 \quad \therefore \ (1, 1); \quad (5, 5)$ முறையே B, C என்ற புள்ளிகளாகும்.

கொடுத்த இரு வரைகளுக்குள்ளடைபட்ட பரப்பு, $y = 1$, $y = 5$ என்ற x-அச்சுக்கு இணை கோடுகளுக்கு இடைப்பட்டது என்று அறிய வேண்டும்.

இடைப்பட்ட பரப்பு

$$= \text{பரப்பு } HBPCK - \text{சரிவகம் } HBCK.$$

பரப்பு $HBPCK$-ஐக் கணக்கிட

பரப்பு $HBPM = A$ எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $\dfrac{dA}{dy} = x = 7y - 5 - y^2$.

$$\therefore \quad A = \left(\frac{7}{2} y^2 - 5y - \frac{y^3}{3}\right)_1^5$$

$$= (\tfrac{7}{2} \cdot 25 - 5 \cdot 5 - \tfrac{5^3}{3}) - (\tfrac{7}{2} - 5 - \tfrac{1}{3})$$

$$= 25 (\tfrac{7}{2} - 1 - \tfrac{5}{3}) - (-1\tfrac{5}{6})$$

$$= 25 x \tfrac{5}{6} + \tfrac{11}{6} = 22\tfrac{2}{3}.$$

சரிவகம் $HBCK = \frac{1}{2}(5 - 1)(5 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$

கொடுத்த இருவரைகளுக்கிடைப்பட்ட

பரப்பு $= 22\frac{2}{3} - 12$

$= 10\frac{2}{3}$ சதுர அலகுகள்

பயிற்சிகள் 28

கீழ்க்காணும் 1 — 14 பயிற்சிகளில் வரையறைக்குட்பட்ட பரம்பளவுகளைக் காண்க.

1. வளைவரை $y = x^3$, x-அச்சு, குத்தாயம் $x = 3$
2. வளைவரை $y = \frac{1}{4}(x + 1)^2$, x-அச்சு, குத்தாயம் $x = 2$
3. பரவளைவு $y^2 = 12x$, x-அச்சு, குத்தாயம் $x = 3$
4. பரவளைவு $y^2 = 12x$, இரட்டைக்குத்தாயம் $x = 12$
5. வளைவரை $y = 9x - x^2 - 14$, x-அச்சு
6. x-அச்சு, வளைவரை $y = (x-1)^2 - 25$
7. x-அச்சு, $y = \sin x$ என்ற வளைவரை.
8. $4ay = 3x^3$ என்ற வளைவரை, இரட்டைக் குத்தாயம் $x = a$
9. வளைவரை $y^2 x = 36$; y-அச்சு, $y = 2$, $y = 6$ என்ற கோடுகள்.
10. வளைவரை $9x = y^2(y + 3)$, y-அச்சு.
11. $y = x^2$; $y = 4x$
12. $x = y^2$; $y = x^2$
13. $y^2 = x$; $y^2 = x^3$
14. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$; y அச்சு; $y = 9$; $y = 16$

15. $y = 2x(3 - x)$ என்ற வளைவரைக்கும் $y = 3x$ என்ற கோட்டிற்குமிடைப்பட்ட பரப்பளவு அவ்வளைவரைக்கும், x அச்சுக்குமிடையிலுள்ள பரப்பளவில் $\frac{1}{8}$ பங்கு என நிறுவுக.

16. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ என்ற வளைவரைக்கும் இரு அச்சுகளுக்குமிடையே உள்ள பரப்பளவைக் காண்க.

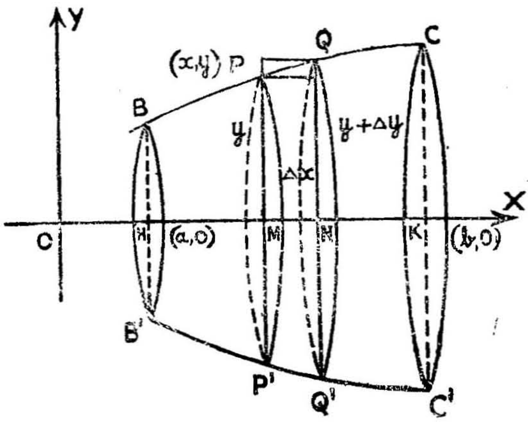
17. $y = (x - 2)^3$; $y^3 = x - 2$ என்ற வளை வரைகளுக்கிடைப்பட்ட பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

18. $ay^2 = x(x-a)^2$ என்ற வளைவின் பரப்பளவென்ன ?

19. $y = 11x - 24 - x^2$; $y = x$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு யாது ?

20. $y = (3x-5)^6$; $y^3 = (3x-5)$ இவற்றுலடைபட்ட பரப்பளவை மதிப்பிடுக.

31. உருளைப் பருமங்கள் (Solids of Revolution)



படம் 8

படத்தில் வில் BC, குத்தாயங்கள் HB, KC x-அச்சு இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு x-அச்சை யொட்டி ஒருமுறை சுற்றும் போது ஏற்படும் முப்பரிமாணப் பொருளின் x-அச்சுக்குச் செங்குத்தாகவுள்ள வெட்டு முகம் ஒரு வட்டமாகும். இம் முப்பரிமாணமுள்ள பொருளை உருளைப் பருமம் என்கிறோம்.

$x = a$, $x = b$ ஆரைகளாகவுள்ள வெட்டுமுகங்களுக்கிடையேயுள்ள பருமத்தைக் காண்போம்.

வளைவரை BC-யின் சமன்பாடு $y = f(x)$ என்க. BC-யின் மேல் P ஏதாவதொரு புள்ளி (x, y) எனில் அதன் குத்தாயம் MP-யை வரைக. வெட்டு முகங்கள் BB', PP' இவற்றிடையேயுள்ள பருமம் V என்போம். P மேலே நகரும்போது x அதிகரிக்கிறது. $\therefore$ V என்பது x-ன் சார்பாகும்.

PP' வெட்டு முகத்திற்கும் $\triangle x$ இடைவெளிவிட்டுள்ள QQ' வெட்டு முகத்திற்கும் இடைப்பட்ட பருமம் $\triangle Y$. நீள் சதுரங்கள்

PN, QM x-அச்சைச் சுற்றும்போது நேர்வட்ட உருளைகள் (cylinders) ஏற்படும்.

அப்போது $\triangle V > PN$ செய்யும் நேர்வட்ட உருளையின் பருமம்

$< QM$ செய்யும் நேர்வட்ட உருளையின் பருமம்.

PN செய்யும் நேர்வட்ட உருளையின் பருமம் $= \pi y^2 \cdot \triangle x$

QM செய்யும் நேர்வட்ட உருளையின் பருமம் $= \pi (y + \triangle y)^2 \cdot \triangle x$

$$\therefore \quad \pi y^2 \cdot \triangle x < \triangle V < \pi (y + \triangle y)^2 \cdot \triangle x$$

$$\pi y^2 < \frac{\triangle V}{\triangle x} < \pi (y + \triangle V)^2.$$

ஆனல் Q, Pயை நெருங்கும்போது $\triangle x \to 0$

அப்போது $\triangle y \to 0, \quad y + \triangle y \to y$

$$\therefore \text{ எல்லை}_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle V}{\triangle x} = \frac{dV}{dx} = \pi y^2$$

உருளைப் பரும வாய்பாடு $V = \int \pi y^2 \, dx$

பருமம் $BB'C'C$, என்பதன் வரையறைத் தொகை $V = \int_a^b \pi y^2 \cdot dx$

குறிப்பு : (1) படத்தில் P, Q புள்ளிகளுக்கிடையே வளை வரையின் சாய்வு மிகையாகும். குறைவாக விருப்பின்

$\pi y^2 > \dfrac{\triangle V}{\triangle x} < \pi (y + \triangle y)^2$ எனவாகும். ஆனல் $\triangle x \to 0$ எனும் போது முன்போலவே $\dfrac{dV}{dx} = \pi y^2$ எனவாகும்.

(2) வளைவரையின் சமன்பாடு $y = f(x)$. எனவே y^2ஐ x-ன் சார்பாகக் கொண்டு தொகையிட வேண்டும்.

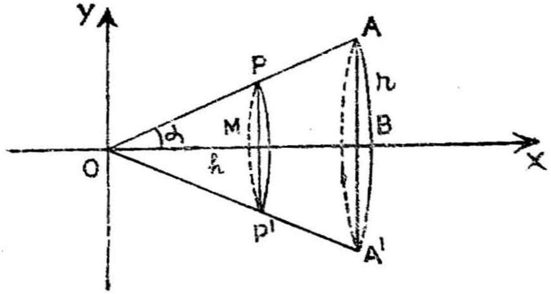
(3) வளைவரை y-அச்சைச் சுற்றினல் உருளைப் பருமம் காணும் வாய்பாடு

$$\frac{dV}{dy} = \pi x^2 \text{ அல்லது}$$

$$V = \int \pi x^2 \, dy \text{ ஆகும். (உரிய எல்லைக்குள்)}$$

எ. கா. 1

h உயரமும் r அடிப்பக்க ஆரையுமுள்ள ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் பருமத்தைக் காண்க.



படம் 9

உச்சிக்கோணம் 2α உள்ள கூம்பின் அச்சை X-அச்சாகவும் கூம்பின் உச்சியை ஆதியாகவும் கொள்வோம். $\tan\alpha$ சாய்வுள்ள OA என்ற நேர்கோடு, X-அச்சையொட்டிச் சுற்றுவதால் கூம்பு ஏற்படுகிறது. OA-ன் சமன்பாடு $y = x\tan\alpha$. அதன்மேல் P ஏதேனுமொரு புள்ளி (x, y)

$$BA = r, OB = h$$

பருமம் காணும் வாய்பாட்டின்படி

$$V = \int_0^h \pi y^2\, dx = \int_0^h \pi x^2 \tan^2\alpha\, dx$$

$$\because \quad y = x\tan\alpha.$$

$$= \pi \tan\alpha^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

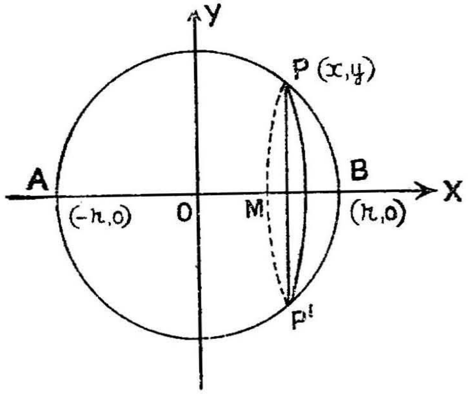
$$= \frac{\pi}{3}(h^2 \tan^2\alpha) \cdot h$$

$$= \frac{\pi}{3} r^2 h, \quad \because \quad r = h\tan\alpha$$

எ. கா. 2

r ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் பருமத்தையும் அதில் h உயரமுள்ள மூடியின் பருமத்தையும் கணக்கிடுக.

$x^2+y^2=r^2$ என்ற அரைவட்டம் அதன் விட்டத்தையொட்டிச் சுற்றும்போது கோளம் ஏற்படுகிறது.



படம் 10

மையத்தை ஆதியாகவும் அடி விட்டத்தை x-அச்சாகவும் கொண்டு P எனும் ஏதாவதொரு புள்ளி (x, y)ஐ அரை வட்டத்தின் மேல் குறித்திடுக. MP குத்தாயம் $= y$

பருமங்காணும் வாய்பாடு

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 \, dx$$

$$= 2 \int_{0}^{r} \pi y^2 \, dx$$ (y அச்சையொட்டிய சமச்சீர் காண்க)

$$= 2 \int_{0}^{r} \pi (r^2 - x^2) \, dx$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

$$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

h உயரமுள்ள மூடியின் பருமங்காண PP^1 மூடியின் வெட்டு முகமெனில் $MB = h$

$$\therefore \quad OM = r - h$$

$$\therefore \text{ மூடியின் பருமம்} = \int_{r-h}^{r} \pi y^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-h}^{r}$$

$$\text{மூடியின் பருமம்} = \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^5}{3} \right) - \left\{ r^2 (r - h) - \frac{(r-h)^3}{3} \right\} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{2}{3} r^3 - (r^3 - r^2 h) - \frac{(r^3 - 3r^2 h + 3rh^2 - h^7)}{3} \right]$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[2r^3 - 3r^3 + 3r^2 h + r^3 - 3r^2 h + 3rh^2 - h^3 \right]$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[h^2 (3r - h) \right]$$

$$= \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$$

எ. கா. 3.

5 டெசி. மீ. ஆழமும், 6 டெசி. மீ. 4 டெசி. மீ. முறையே மேல் மட்ட ஆரையும், அடிமட்ட ஆரையுமுள்ள ஒரு தொட்டியின் பருமத்தைக் காண்க.

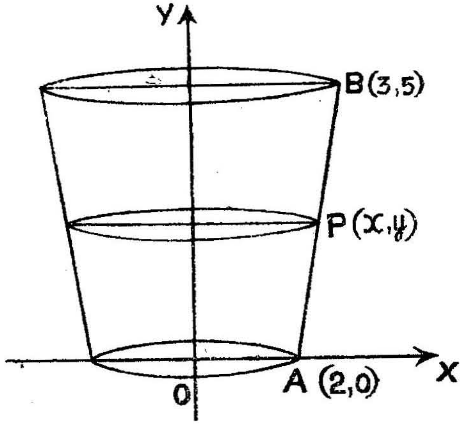
படத்திற்காட்டியபடி x, y அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

AB என்ற நேர்கோடு y-அச்சைச் சுற்றுவதால் ஏற்படும் உருளையே தொட்டியாகும்.

$$AB\text{-யின் சாய்வு} = \frac{5 - 0}{3 - 2} = 5$$

$\therefore$ AB-யின் சமன்பாடு $y = 5\,(x - 2)$

$$x = \frac{y}{5} + 2$$



படம் 11

பரும வாய்பாடு $V = \int \pi\, x^2 \cdot dy$

$$= \int \pi \left(\frac{y}{5} + 2\right)^2 \cdot dy.$$

y-ன் எல்லைகள் 0, 5

$\therefore$ தொட்டியின் பருமம் $= \displaystyle\int_0^5 \pi \left(\frac{y}{5} + 2\right)^2 \cdot dy$

$$V = \pi \left\{ \frac{\frac{\left(\frac{y}{5} + 2\right)^3}{3}}{\frac{1}{5}} \right\}_0^5$$

$$= \frac{5}{3}\pi \left[\left(\frac{5}{5} + 2\right)^3 - 2^3\right] = \frac{5}{3}\pi + (27 - 8)$$

$$= \tfrac{5}{3} \times 19\pi + \tfrac{95}{3}\pi = 31\tfrac{2}{3}\pi \text{ க. டெசி. மீ.}$$

பயிற்சிகள் 29

கீழ்க்காணும் 1—8 பயிற்சிகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அச்சுகளை யொட்டி வளைவரைகள் சுற்றும்போது உண்டாகும் உருளைப் பருமங்களைக் காண்க.

1. $y = x^3$ என்ற வளைவரை, x-அச்சு, $x = 3$ என்ற குத்தாயம் இவற்றிற்கிடையே உள்ள பரப்பளவு x-அச்சையொட்டி

2. $y = \frac{(x+1)^3}{4}$, x அச்சு, குத்தாயங்கள் $x = 2$, $x = 4$ இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள பரப்பு x-அச்சையொட்டி

3. பரவளைவு $y^2 = 12x$, x-அச்சு, குத்தாயம் $x = 3$ x-அச்சையொட்டி

4. $y^2 = 12x$, y-அச்சு, $y = 6$, y-அச்சையொட்டி

5. $xy = 12$, y-அச்சு, $y = 2, y = 12$: y-அச்சையொட்டி

6. $y = 9x - x^2 - 14$, x-அச்சு, x-அச்சையொட்டி

7. நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, x-அச்சையொட்டி

8. $y^2 = 12(3 - x)$, y-அச்சு, y-அச்சையொட்டி

9. ஒரு கோள ஆரையை இரு சமபாகங்களாகவும் ஒரு சமதளம் வெட்டும்போது ஏற்படும் இருபகுதிகளின் பருமங்களைக் காண்க.

10. $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற அதிபரவளைவு x-அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போது உச்சியிலிருந்து a உயரம்வரை உண்டாகும் உருளைப் பருமம், a ஆரையுள்ள கோளத்தின் பருமத்திற்குச் சமமென நிறுவுக.

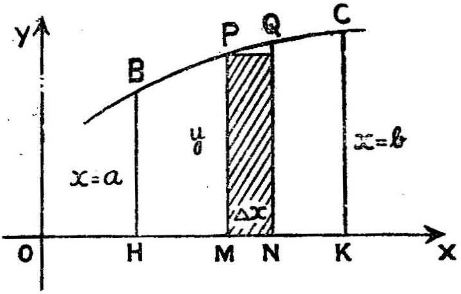
11. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற வளைவரை ஒரு அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போது உண்டாகும் உருளைப் பருமத்தை மதிப்பிடுக.

12. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் நுனியில்லாத துண்டத்தின் (Truncated Cone) உயரம் 1 அடி, அதன் இரு ஓர வட்டங்களின் விட்டங்கள் முறையே 4", 10" என்றல் அத்துண்டத்தின் பருமமென்ன ?

§ 32. வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பு (Area bounnded by a curve)

முதற்பகுதியில் எளிய பயிற்சிகளைக் கொண்டு பரப்பளவுகளைக் கணக்கிடும் முறையைக் கண்டோம். § 33-ல் எவ்வாறு ஒரு வரையறுத்த தொகை பரப்பளவைக் காட்டுமென்று விளக்கினேம். எடுத்துக்காட்டாக,

பரப்பு $BHKC$ = எல்லை Σ நீள் சதுரம் PN



படம் 12

$= \text{எல்லை } \Sigma\, (MP, MN)$

$= \text{எல்லை } \Sigma\, f(x)\, \Delta x$

$= \int_a^b f(x) \cdot dx$

எனவே,

$y = f(x)$, x அச்சு, $x = a$, $x = b$ என்ற எல்லைகட்குட்பட்ட பரப்பளவைக் கணக்கிட அதை x அச்சிற்குச் செங்குத்தான நீள் சதுர வடிவான நுண்பகுதிகளாகப் பிரித்து அவற்றின் கூடுதலின் எல்லை மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

$x = f(y)$ என்ற வளைவரைக்கும் $y = \alpha$, $y = \beta$ என்ற கோடுகளுக்குமிடையேயுள்ள பரப்பு, y அச்சிற்குச் செங்குத்தான நுண்ணிய நீள் சதுரக் கூடுதலின் எல்லை மதிப்பாகும்.

$\therefore$ வேண்டிய பரப்பின் எல்லை மதிப்பு $= \int_\alpha^\beta f(y) \cdot dy = \int_\alpha^\beta x \cdot dy$

பொதுவிதி : வரையறுத்த தொகையீட்டு முறையில் கணக்கிட, வேண்டிய பரப்பு, வில்லின் நீளம், அல்லது பருமம், இவற்றை முதற்படி நுண்பகுதிகளாக்கி (first order of infinitesimals) அவற்றின் கூடுதலின் எல்லை மதிப்பைத் தொகையீட்டு முறையில் (Integration) காணவேண்டும்.

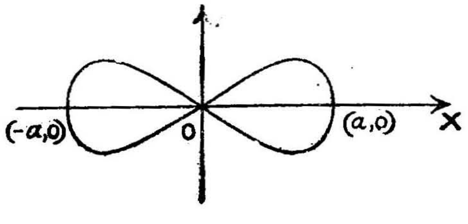
குறிப்பு : Δx மிகையாக (positive) இருக்கும்போது $\Sigma\, [f(x) \cdot \Delta x]$, அதாவது பரப்பின் குறி, $f(x)$-ன் குறியைப்

பொருத்து மிகையாகவோ, குறைவாகவோயிருக்கும். $f(x)$-ன் மதிப்பு x அச்சுக்குமேலே இருப்பின் மிகையென்றும், கீழேயிருப்பின் குறையென்றும் கொள்கிறோம். ஆதலால் ஒரு வளைவரையின் பரப்பில் ஒரு பகுதி x அச்சுக்கு மேலும் மறுபகுதி கீழுமாக இருப்பின் உண்மையான பரப்பை (absolute value)க் காண இரு பகுதிகளையும் தனித்தனியாக மதிப்பிட்டுக் கூட்டவேண்டும். இதுபோலவே $\triangle y$ மிகையெனில் $f(y)$-ன் குறி y அச்சுக்கு வலதுபுறம் மிகை, இடதுபுறம் குறை எனப்படும்.

எ. கா. 1

$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$ என்ற வளைவரைக்கு உட்பட்ட மொத்த பரப்பைக் கணக்கிடுக.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு x, y இவற்றில் இரட்டைப்படை யாதலால் இரு அச்சுகளையொட்டி வளைவரை சீராக அமைந்தது. தவிர $x = \mp a$ எனப்பிரதியிட $y = 0$ வாகவும் $x = > + a$, $x < - a$ என்ற மதிப்புகளுக்கு y-ன் மதிப்பு கற்பனை (imaginary) ஆவதால், வளைவரை $x = \pm a$ குத்தாயங்களுக்கிடைப்பட்டது.



படம் 13

A என்ற முழுப்பரப்பு = முதல் நாற்கூறுப் பகுதியிலுள்ள பரப்பில் நான்கு மடங்கு.

$$A = 4 \int_0^a y \cdot dx = 4 \int_0^a \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot d(x^2)$$

$$\therefore \quad A = \frac{2}{a}\int_{0}^{a^2} \sqrt{a^2 - u} \cdot du\,; \qquad u = x^2.$$

$$= \frac{2}{a}\left[-\frac{2}{3}(a^2 - u)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{a^2} = \frac{-4}{3a}\left[0 - a^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3a}\,a^3 = \frac{4}{3}\,a^2.$$

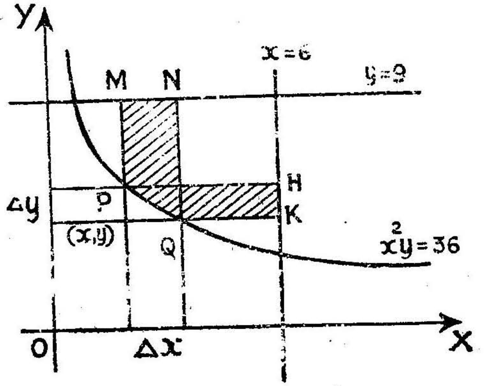
எ. கா. 2.

$x^2y = 36$ என்ற வளைவரைக்கும், $y = 9$, $x = 6$ என்ற கோடுகளுக்குமிடையிலுள்ள பரப்பைக் காண்க.

(i) $y = 9$ எனும் போது $x^2 \cdot 9 = 36 \quad \therefore \quad x = \pm 2.$

ஆனல், பரப்பு முதல் நாற்கூறுப் பகுதியிலுள்ளது. $x = -2$ என்பது பொருந்தாது.

$\therefore$ பரப்பளவு $x = 6$, $x = 2$ குத்தாயங்களுக்கிடைப்பட்டது.



படம் 14.

$A =$ எல்லை $\Sigma\, MPQN \quad =$ எல்லை Σ (நீள் சதுரம் PN)

$=$ எல்லை $\Sigma\,(PM \cdot MN) =$ எல்லை $\Sigma\,(9 - y)\,\Delta x$

$$= \int_{2}^{6}\left(9 - \frac{36}{x^2}\right)dx.$$

$$= 9\left(x \right)_2^6 + 36\left(\frac{1}{x}\right)_2^6$$

$$= 9\ (6 - 2) + 36\ (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2})$$

$$= 36 - 36 \cdot \tfrac{2}{6} = \mathbf{24}$$

(ii) மாற்றுமுறை :

Y-அச்சுக்குச் செங்குத்தாக நீள் சதுரங்கள் வரைந்தால் $x = 6$ எனும் போது, $y = 1$.

$A = \Sigma$ (நீள் சதுரம் PK) $= \Sigma\ (PH \cdot KH)$

$$= \Sigma\ (6 - x) \cdot \triangle y = \int_1^9 (6 - x)\ dy$$

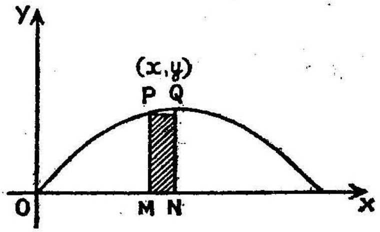
$$= \int_1^9 \left(6 - \frac{6}{\sqrt{y}}\right) dy = 6\left(y - 2\sqrt{y}\right)_1^9$$

$$= 6\ [9 - 2 \cdot 3] - 6 \cdot (1 - 2) = 6\ (3 + 1) = \mathbf{24}$$

எ. கா. 3.

ஓர் உருள்வளை (cycloid)-க்கும் அதன் அடிக்கோட்டிற்கு மிடைப்பட்ட பரப்பைக் கணக்கிடுக.

உருள்வளையின் சமன்பாடுகள்



படம் 15

$x = a\ (\theta - \sin\theta)$

$y = a\ (1 - \cos\theta)$

$P(x, y)$ எனும் புள்ளி ஒரு வளைவரையில் செல்லும் போது θ-ன் மதிப்பு O-விலிருந்து 2π ஆகிறது.

$$\therefore \text{ பரப்பு } = \int y\,dx = \int_0^{2\pi} y \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta.$$

$$= \int_0^{2\pi} a\,(1 - \cos\theta) \cdot a\,(1 - \cos\theta)\,d\theta.$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos)^2\,d\theta =$$

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$\because \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot d\theta = 0$$

$$= 4a^2 \cdot \Big(\theta\Big)_0^{\frac{\pi}{2}} + 4a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$

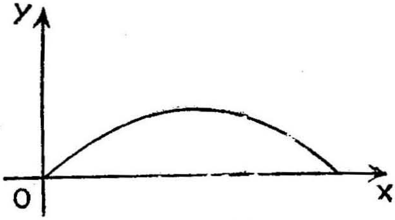
எ. கா. 4.

$y = a \sin x$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வளைவிற்குட்பட்ட பரப்பு யாது ?

$y = a \sin x$ எனில்

$x = 0, \pi$ எனில்

$y = 0$ $\therefore$ கீழ், மேல் x-ன் எல்லைகள் முறையே $0, \pi$.



படம் 16

$$\therefore \text{ ஒரு வளையின் பரப்பு } = \int_0^{\pi} y \cdot dx$$

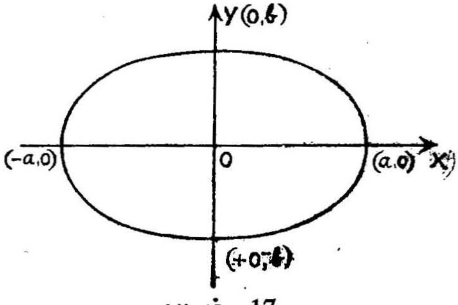
$$= \int_0^{\pi} a \sin x \cdot dx$$

$$= a\left(-\cos x\right)_0^{\pi} = -a(-1-1) = 2a$$

எ. கா. 5

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் பரப்பளவு யாது?

சமன்பாடு x, y களின் இருபடி. ∴ நீள்வட்டம் இரு அச்சுகளையொட்டிச் சீரானது.



படம் 17

∴ பரப்பு $A = 4$ கால் நீள் வட்டம்

$$= 4\int_0^{a} y \cdot dx. \qquad \begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \text{ எனப்} \end{array}$$

பிரதியிட்டால் $x = 0, a$ எனில் $\theta =$ முறையே $\frac{\pi}{2}$, 0.

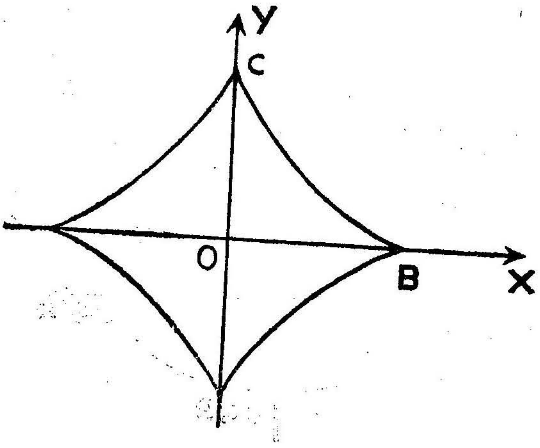
$$dx = -a \sin\theta \cdot d\theta.$$

$$\therefore \quad A = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b \sin\theta \cdot (-a \sin\theta)\, d\theta.$$

$$= 4\, ab \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cdot d\theta = 4\, ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

எ. கா. 6

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற வளைவரைக்குட்பட்ட பரப்பு யாது? அடுக்கு $\frac{2}{3}$ல் தொகுதி இரட்டைப் படையாதலால் அச்சுகளை யொட்டி வளைவரை சீரானது.



படம் 18

$y = 0$ எனில் $x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $\quad \therefore \quad x^2 = a^2, \quad x = \pm a$

$x = 0$ எனில் $y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $\quad y^2 = a^2, \quad y = \pm a.$

$\therefore$ பரப்பு $A = 4 \times$ பரப்பு OBC

$$= 4 \int_0^a y \cdot dx$$

$x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$. எனப் பிரதியிட்டால்

$x = 0$ எனும்போது $\theta = \pi/2$

$x = a$ எனும்போது $\theta = 0$

$dx = -3\, a \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta$.

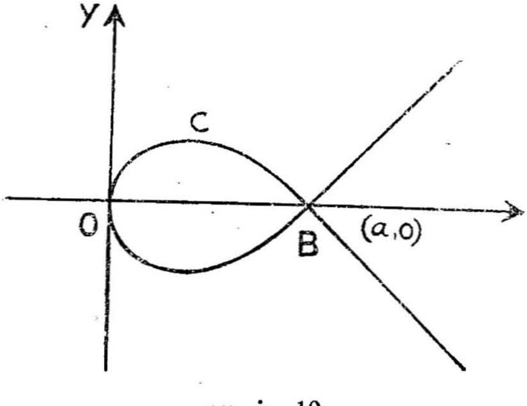
$$A = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a \sin^3 \theta \,(-3\, a \cos^2 \theta \cdot \sin \theta)\, d\theta.$$

$$= 12\, a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta$$

$$= 12\, a^2 \cdot \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\, \pi a^2}{8}$$

எ. கா. 7.

$3ay^2 = x\,(x - a)^2$ என்ற வளைவரையின் வளையத்தின் பரப்பளவைக் காண்க. சமன்பாடு Y-ன் இருபடி. $\therefore$ வளைவரை X-அச்சை யொட்டிச் சீரானது.



படம் 19

$x = 0$ என்றால் $y = 0$ $\therefore$ ஆதிவழியாகச் செல்கிறது.

$x = a$ என்றால், $y = 0$ $\therefore$ x அச்சை $(a, 0)$-ல் வெட்டுகிறது.

$x = \infty$ என்றால் $y = \pm \infty$;

$x =$ குறை மதிப்பு என்றால் y கற்பனையாகும்.

$\therefore$ வளைவரையின் வளைவு y-அச்சுக்கு வலது புறமாக $x = 0, a$ எல்லைக்குள் x-அச்சுக்குச் சீராக அமையும்.

வளைவின் பரப்பு

$A = 2$ பரப்பு OBC

$$= 2 \int_0^a y \cdot dx$$

$$= 2 \int_0^a \frac{\sqrt{x} \cdot (x - a)}{\sqrt{3a}} \cdot dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}} \int_0^a (x^{\frac{3}{2}} - ax^{\frac{1}{2}}) \cdot dx.$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}} \left[\tfrac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} - a \cdot \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}} \left[\tfrac{2}{5} \cdot a^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3} \cdot a^{\frac{5}{2}} \right] = \frac{4}{\sqrt{3}} a^2 \left(-\tfrac{2}{15}\right)$$

$$= -\frac{8}{15\sqrt{3}} \cdot a^2$$

பயிற்சிகள் 30

1. $x^2 = 4y$ என்ற பரவளைவிற்கும், x-அச்சு, $x = 2$ என்ற கோடு இவற்றிற்கிடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

2. $y = \cos 2x$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வளைவுக்கும் x-அச்சுக்குமிடைப்பட்ட பரப்பு யாது ?

3. $x = c$ என்ற கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தைப் பிரிக்கும் இரு பகுதிகளின் பரப்பு ஒவ்வொன்றையும் காண்க.

4. $ay^2 = x^3$, x-அச்சு, $x = a$ இவற்றிற்குள்ளடங்கிய பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

5. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற வளைவரைக்கும், இரு அச்சுகளுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

6. இரு அச்சுகளுக்கும் $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ என்ற வளைவரைக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

7. $y = 5x - x^2 - 4$ என்ற வளைவரைக்கும், x-அச்சுக்குமிடையேயுள்ள பரப்பைக் காண்க.

8. $y = c \cosh \frac{x}{c}$, அச்சுக்கள், $x = c$ இவற்றிற்கிடைப்பட்ட பரப்பு யாது ?

9. பின்வரும் வளைவரைகளின் வளைவுகளின் (loops) பரப்பளவை மதிப்பிடுக.

(i) $y^2 = \frac{x^2(1+x)}{1-x}$ (ii) $y^2 = x^4(x+2)$

(iii) $2y^2 = (1-x)(1+2x)^2$

(iv) $y^2 = (x+1)(x-2)^2$

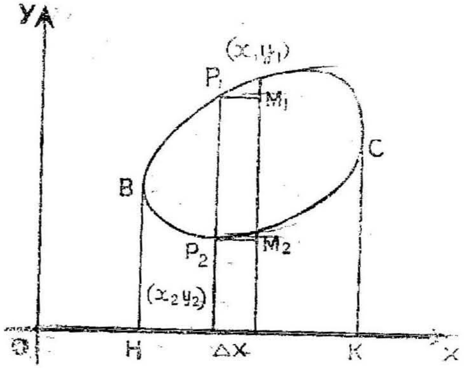
(v) $ay^2 = (x-a)(x-5a)^2$

10. $y(x^2 + 4a^2) = 8a^3$-க்கும் அதன் அணுகுகோட்டிற்கும் (asymptote) இடையேயுள்ள பரப்பைக் காண்க.

11. $y^2(2a - x) = x^3$ என்ற வளைவரைக்கும் அதன் அணுகு கோட்டிற்குமிடையேயுள்ள பரப்பைக் காண்க.

12. $y^2 = 4ax$, அதன் செவ்வகம் (latus rectum) இவற்றிற்கிடையேயுள்ள பரப்பு என்ன ?

§ 33. முடிய வளைவரையின் பரப்பளவு (Area of a closed curve)



படம் 20

BH, CK என்ற குத்தாயங்கள் வளைவரையின், y-அச்சுக்கு இணையான எல்லைத் தொடுகோடுகள். ஒரு குத்தாயம் வளைவரையை $P_1\ (x_1\ y_1)$, $P_2\ (x_2, y_2)$ எனும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $y_1 > y_2$, $OH = a$:

$OK = b$ என்போம்.

$$\text{பரப்பு } HBP_1CK = \int_a^b y_1\, dx \qquad \ldots \quad \ldots \text{(i)}$$

$$\text{பரப்பு } HBP_2CK = \int_a^b y_2\, dx \qquad \ldots \quad \ldots \text{(ii)}$$

$$\text{(i)—(ii), பரப்பு } BP_1CP_2 = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$$

அல்லது

$$\text{பரப்பு } BP_1CP_2 = \text{எல்லை } \Sigma \text{ நீள்சதுரம் } P_1M_2$$

$$= \text{எல்லை } \Sigma\, (P_2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot M_2)$$

$$= \text{எல்லை } \Sigma\, (y_1 - y_2) \triangle x$$

$$= \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx \qquad \ldots I$$

இங்கு x-ன் a,b எல்லைகளில் $y_1 = y_2$

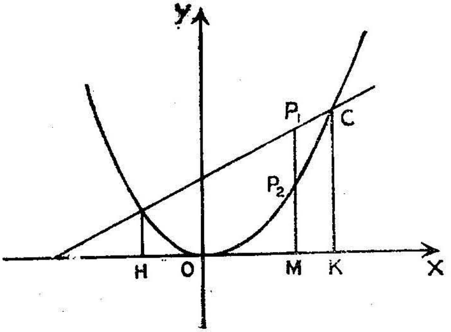
குறிப்பு : நீள் சதுரங்கள் x-அச்சுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளன. ஆனால் அவற்றின் உயரம் $y_1 - y_2$-ம் அகலம் Δx-ம், x-அச்சு மேலுங்கீழும் இணையாக நகருவதால் மாரு. ஆகையால் x-அச்சு வளைவரையை வெட்டினாலுங்கூட மேற்கண்ட வாய்பாடு I முழுப் பரப்பைக் கொடுக்கும்.

எ. கா. 1.

$y = x^2$ என்ற பரவளைவிற்கும் $2x - y + 3 = 0$ என்ற கோட்டிற்குமிடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

$y = x^2$, $2x - y + 3 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து $2x - x^2 + 3 = 0$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x - 3)(x + 1) = 0$

$\therefore \quad x = 3$ அல்லது -1



படம் 21

$$\text{அடைப்பட்ட பரப்பு, } A = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$$

இங்கு எல்லைகள் $a = -1$, $b = 3$

$$MP_1 = y_1 : \quad MP_2 = y_2$$

$y_1 = 2x + 3$, $y_2 = x^2$

$$\therefore \quad A = \int_{-1}^{3} [(2x + 3) - x^2]\, dx = \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}$$

$$= [(9 + 9 - \tfrac{27}{3}) - (1 - 3 + \tfrac{1}{3})]$$

$$= 9 + 1\tfrac{2}{3} = 10\tfrac{2}{3}$$

எ. கா. 2.

$3x^2 - 10xy + 10y^2 + 8x - 20y + 10 = 0$ என்ற வளை வரையின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

x-ன் எம் மதிப்பிற்கும் y-ன் இரு மதிப்புகளைக் காணக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை y-ல் இருபடியாகக் கொண்டு மூலங் காண்போம்.

$$10y^2 - 10y(x+2) + (3x^2 + 8x + 10) = 0$$

y_1, y_2 என்பன மூலங்களானல்

$$y_1 + y_2 = \frac{10(x+2)}{10} = (x+2)\,; \quad y_1 y_2 = \frac{3x^2+8x+10}{10}$$

$$\begin{aligned}(y_1 - y_2)^2 &= (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 \\ &= (x+2)^2 - \tfrac{4}{10}(3x^2 + 8x + 10) \\ &= \tfrac{1}{5}[5(x^2 + 4x + 4) - 2(3x^2 + 8x + 10)] \\ &= \tfrac{1}{5}[-x^2 + 4x] = \tfrac{1}{5}x(4-x)\end{aligned}$$

$$(y_1 - y_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{x(4-x)}$$

$y_1 = y_2$ என்றபொழுது $\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{x(4-x)} = 0$

$\therefore \quad x = 0$ அல்லது 4

$$\therefore \quad \text{பரப்பளவு} = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{x(4-x)} \cdot dx$$

இங்கு $x = 4\sin^2\theta$ என ஈடுசெய்தால்

$$dx = 8\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$x = 0$ எனில் $\theta = 0$; $x = 4$ எனில் $y = \frac{\pi}{}$

$$\therefore \quad \text{பரப்பளவு} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta \cdot 2\cos\theta \cdot 8\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{32}{\sqrt{5}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{32}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \cdot \pi$$

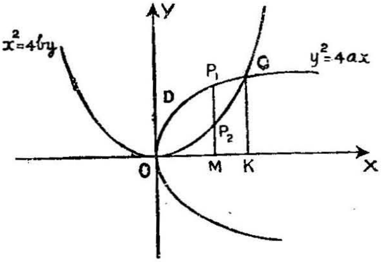
எ. கா. 3.

$y^2 = 4ax$, $x^2 = 4by$ என்ற பரவளைவுகளுக்குப் பொதுவான பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

$y^2 = 4\,ax$

$x^2 = 4\,by$

இவற்றிலிருந்து x-ஐக் காண,



படம் 22

$x^2 = 4\,by, \quad x^4 = 16\,b^2\,y^2$

$\qquad\qquad = 16b^2\,(4\,ax)$

$\therefore \quad x^4 = 64\,ab^2x$

$x^3 = 64\,ab^2 \qquad \therefore \quad x = 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$

$\therefore$ x-ன் எல்லைகள் $0, 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$;

$$y_1 = MP_1 = \sqrt{4ax}\ ,\ y_2 = MP_2 = \frac{x^2}{4b}$$

$$A = \int_0^{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} (y_1 - y_2)\, dx$$

$$= \int_0^{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} \left(\sqrt{4ax} - \frac{x^2}{4b} \right) dx$$

$$= \left[2\sqrt{a} \cdot \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4b} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3} \left(4a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12b} \cdot \left(4a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \right)^3$$

$$= \frac{32}{3} ab - \frac{1}{12b} \cdot 64ab^2 = \frac{32}{3} ab - \frac{16}{3} ab$$

$$= \frac{16}{3} ab$$

பயிற்சிகள் 31

1. கொடுத்துள்ள எல்லைகட்குள் பரப்பளவு காண்க.

 (i) $y = \sin x, \quad y = \cos x,$ y — அச்சு

 (ii) வளைவரைகள் $y = x^3, \quad y^2 = 9x$

 (iii) $(y - 1)^2 = 4x, \ x^2 = 4(y - 1)$

 (iv) $y = 3x - x^2, \quad y = x^2 - x$

2. $y^2 = 4a(x + a),\ y^2 = 4b(b - x)$ என்ற பரவளைவுகளுக்கிடைப்பட்ட பரப்பளவு

$\frac{8}{3}(a + b)\sqrt{ab}$ என நிறுவுக.

3. $x^2 + y^2 = 25$ என்ற வட்டத்திற்கும் $3x^2 = 16y$ என்ற பரவளைவிற்கும் பொதுவான பரப்பளவைக் காண்க.

4. $y^2 = 4ax$-க்கும் $x^2 + y^2 = 8ax$-க்கும் பொதுவான பரப்பளவைக் கணக்டுக.

5. $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$ என்ற வளைவரையின் வளையமும், வளைவரைக்கும் அதன் அணுகு கோட்டிற்கும் (asymptote) இடையிலுள்ள பகுதியும் $3\sqrt{3}\,a^2$ என நிறுவுக.

6. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$-க்கும் $4y = x$-க்கும் பொதுவான பரப்பு யாது ?

7. $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ என்ற நீள் வட்டத்தின் பரப்பளவு என்ன ?

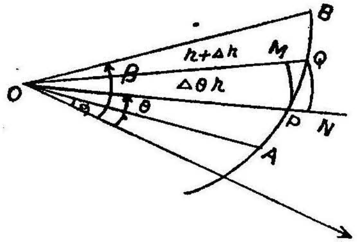
8. $5x^2 + 6xy + 2y^2 + 7x + 6y + 6 = 0$ என்ற வளைவரையின் பரப்பளவு யாது ?

§ 34. துருவ ஆயத் தொலைகளில் (Polar Co-ordinates) பரப்பளவு

P, Q என்பன வில் AB-ன் மேலுள்ள அண்மைப் புள்ளிகள். அவற்றின் துருவ ஆய எண்கள் முறையே,

$(r, \theta), (r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$

O-ஐ மையமாகக் கொண்டு $r, r + \Delta r$ ஆரைகளாக வரைந்த வட்டங்கள் OQ, OP-யை முறையே M, N என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால்,



படம் 23.

CPQ-ன் பரப்பு, CPM, OQN என்ற வட்டப் பகுதிகளின் பரப்பளவுகளுக்கு இடைப்பட்டதாகும். $\dfrac{dr}{d\theta}$-ன் குறி A, B புள்ளி

களுக்கிடையில் மாறுவதில்லையென்றால், நுண்பரப்புகள் OPQ-வின் கூட்டுத் தொகை $\Sigma \frac{1}{2} r^2 \triangle \theta$, $\Sigma \frac{1}{2} (r + \triangle r)^2 \cdot \triangle\theta$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்டதாகும்.

$\triangle \theta \to 0$ ஆகும் போது $\triangle r \to 0$

$\Sigma \frac{1}{2} r^2 \triangle\theta$, $\Sigma \frac{1}{2} (r + \triangle r)^2 \cdot \triangle\theta$, இவை ஒரே எல்லையை நாடும்.

$$\therefore \underset{\triangle \theta \to 0}{\Sigma \text{ எல்லை}} \text{ பரப்பு } OPQ = \underset{\triangle \theta \to 0}{\text{எல்லை}} \Sigma \tfrac{1}{2} r^2 \triangle\theta$$

எனவாகும்.

$$\therefore \quad \text{பரப்பு } OAB = \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2} r^2 \cdot d\theta \qquad \text{(i)}$$

இங்கு α, β என்பவை A, B புள்ளிகளின் ஆரைக் (vectorial) கோணங்கள்.

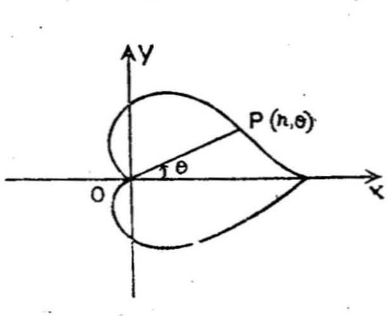
$\therefore$ ஆரைகள் OA, OB, வில் AB இவற்றால் அடைபட்டது (i)ல் கண்ட பரப்பு OAB.

குறிப்பு : $\frac{dr}{d\theta}$ ஒரே (குறை அல்லது மிகை) குறியுள்ள சிறிய பகுதிகளாக, வில் AB-ஐப் பிரித்தால் வாய்பாடு (i) ஒவ்வொன்றுக்கும் ஏற்றதாகுமாதலால் அது முழுவில்லுக்கும் ஏற்றதாகும்.

எ. கா. 1.

நெஞ்சுவளை (cardioid), $r = a\,(1 + \cos\theta)$-ன் பரப்பளவைக் காண்க.

$a\,(1 + \cos\theta)$ ஒரு இரட்டைச் சார்பானதால் தொடக்கக் கோடு OX-ஐ ஒட்டிச் சீரானது.



படம் 24.

∴ பரப்பளவு

$$= 2\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2} r^2 \cdot d\theta.$$

$$= \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\theta)^2 \cdot d\ .$$

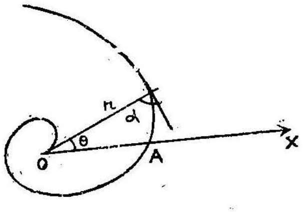
$$= a^2 \cdot \int_0^{\pi} 4\cos^4\frac{\theta}{2}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2.$$

$$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\phi\, d\phi,\quad \phi = \frac{\theta}{2}$$

$$= 8a^2 \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right] = \frac{3}{2}\pi a^2$$

எ. கா. 2.

வளைவரை $r = a \cdot e^{\theta \cdot \cot\alpha}$, r_1, r_2 என்ற ஆரைத் தொலைகள் இவற்றால் அடைபட்ட பரப்பளவைக் காண்க.



படம் 25

$$\text{பரப்பு} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tfrac{1}{2} a^2 \cdot e^{2\theta\cot\alpha} \cdot d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{e^{2\theta \cdot \cot\alpha}}{2\cot\alpha}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

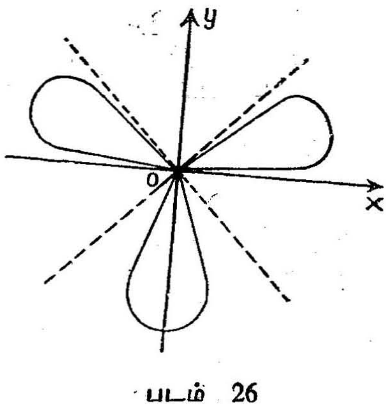
$$= \frac{a^2}{4\cot\alpha}\left[e^{2\theta_2 \cot\alpha} - e^{2\theta_1 \cot\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\tan\alpha\left[\left(a \cdot e^{\theta_2 \cot\alpha}\right)^2 - \left(a\, e^{\theta_1 \cot\alpha}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\tan}{4}(r_2{}^2 - r_1{}^2)$$

எ. கா. 3.

$r = a \sin 3\theta$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வளையத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.



படம் 26

$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ என்ற மதிப்புகளுக்கு $r = 0$

$$\text{பரப்பு} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tfrac{1}{2} r^2 \cdot d\theta.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 6\theta}{2} d\theta$$

$$\text{பரப்பு} = \frac{a^2}{4}\left[\theta - \frac{\sin 6\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{a^2}{4}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{6}\sin 2\pi\right] = \frac{\pi a^2}{12}$$

பயிற்சிகள் - 32

1. $r = 2a\cos\theta$ என்ற வட்டத்தின் பரப்பு யாது ?

2. $r = 4(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளைவின் பரப்பைக் காண்க.

3. $r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$ என்ற வளைவரையின் பரப்பைக் கணக்கிடுக.

4. $r = a\sin 2\theta$-ன் ஒரு வளையத்தின் பரப்பைக் காண்க.

5. $r^2 = a^2\cos 2\theta$-ன் ஒரு வளையத்தின் பரப்பு யாது ?

6. $r\theta = c$ என்ற வளைவரைக்கும் இரு ஆரைத் தொலைகளுக்கு மிடைப்பட்ட பரப்பு அவ்விரு திசை ஆரங்களின் வேறுபாட்டிற்கு நேர் விகிதத்தி லமையுமென நிறுவுக.

7. $r = 2 + 4\cos\theta$ என்ற வளைவரை ஒன்றினுள் ஒன்றுகவுள்ள இரு வளையங்களென்றும், பெரிய வளையத்தின் பரப்பு $8\pi + 6\sqrt{3}$ எனவும் நிறுவுக.

8. $r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற வளைவரையின் பரப்பை முனை வழியாக தொடக்கக் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக வரைந்த நேர்கோடு இருபகுதிகளாக்கினால் ஒவ்வொன்றின் பரப்பையும் கணக்கிடுக.

10. வரையறுத்த தொகைகளின் பண்பாடுகள்

§ 35. (Properties of Definite Integrals)

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$

ஏனெனில் $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ எனக் கொண்டால்

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)\,dy$$

∴ மாறிகள் மாறுவதால் வரைகளுக்குட்பட்ட தொகையின் மதிப்பு மாறாதென அறியலாம்.

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

ஏனெனில் $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$F(x)$ தொகையீடு

$$= -[F(a) - F(b)]$$

$$= -\int_b^a f(x)\,dx$$

வரைகளை ஒன்றுக்கு மற்றதாக மாற்றுவதால் தொகையின் குறியீடு மாறுகின்றதென அறியலாம்.

(iii) $\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$a < c < b$

ஏனெனில், வலதுபக்கம்

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,.\,dx$$

$$= [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)]$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b F(x)\,dx$$

= இடது பக்கம்.

(iv) $f(x)$ இரட்டைச் சார்பாயின்

$$f(-x) = f(x)$$

எ. கா.

$$x^2,\ x^{2n}\ \frac{}{a^2+x^2},\ a\,x^4 + bx^2 + c,\ \cos x,\ \cos^n x\ \sin^{2n} x.$$

(v) $f(x)$ ஒற்றைச் சார்பாயின் $f(-x) = -f(x)$

எ. கா.

$$x,\ x^3,\ x^{2n+1},\ \frac{x^3}{a^2+x^2},\ ax^3 + bx,\ \sin x,\ \cos^n x\,.\,\sin^{2n+1} x\,.$$

(vi) பண்பு

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_0^a [\,f(x) + f(-x)\,]\,dx$$

ஏனெனில் $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$-ல் $x = -y$ என்றிட $dx = -dy$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-y)\,dy = \int_0^a f(-y)\,dy$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\, dx.$$

$$\therefore \int_{-a}^{+a} f(x)\; dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\; dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\; dx + \int_{0}^{a} f(x)\; dx$$

$$= \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\; dx.$$

(vii) $\int_{0}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(a-x)\, dx$

ஏனெனில், $\int_{0}^{a} f(a-x)\, dx$-ல் $a - x = y$ என்றிட,

$$-\, dx = dy$$

மேல் எல்லை $x = a$ எனில் $y = 0$

கீழ் எல்லை $x = 0$ எனில் $y = a$

$$\therefore \int_{0}^{a} f(a-x)\, dx = -\int_{a}^{0} f(y)\, dy$$

$$= \int_{0}^{a} f(y)\, dy = \int_{a}^{0} f(x)\, dx$$

(viii) பொதுவாக

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = -\int_{a}^{b} f(b + a - x)\, dx$$

ஏனெனில், வலது பக்கம் $(a + b - x) = y$ எனில்

$$-\, dx = dy$$

மேல் எல்லை $x = b$ எனில் $y = a$

கீழ் எல்லை $x = a$ எனில் $y = b$

$$\therefore \int_a^b f(a + b - x)\, dx$$

$$= -\int_b^a f(y)\, dy$$

$$= \int_a^b f(y)\, dy$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx$$

எ. கா. 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin \frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx$$

(ix) $f(a - x) = f(x)$ என்றால்,

$$\int_0^a f(x)\, dx = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\, dx$$

ஏனெனில் $\displaystyle\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\, dx + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\, dx$

$\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\, dx$-ல் $x = a - y$ என்றிட $dx = -dy$

மேல் எல்லை $x = a$ எனில் $y = 0$

கீழ் எல்லை $x = \frac{a}{2}$ எனில் $y = \frac{a}{2}$

$$\therefore \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x) \cdot dx = -\int_{\frac{a}{2}}^{0} f(a-y) \cdot dy$$

$$= \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(a-y)\, dy$$

$$= \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(a-x)\, dx = \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)\, dx,$$

$$\because \; f(a-x) = f(x)$$

$$\therefore \int_{0}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)\, dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)\, dx$$

(x) $f(a-x) = -f(x)$ எனில், $\int_{0}^{a} f(x)\, dx = 0$

ஏனெனில், $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ .... (ix)-ல் காட்டியது

$$= -\int_0^a f(x)\,dx \quad \because f(a-x) = -f(x)$$

$$\therefore \quad 2\int_0^a f(x)\,dx = 0 \text{ அல்லது}$$

$$\int_0^a f(x)\,dx = 0$$

எ. கா. 2.

$$\sin(\pi - x) = \sin x.$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

எ. கா. 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4} \text{ என நிறுவுக.}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot dx$$

$$\therefore\ 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot dx.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = (x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{4}$$

எ. கா. 4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\frac{3}{2}}\, dx}{(\sin x)^{\frac{3}{2}} + (\cos x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{4}$$ என நிறுவுக.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\frac{3}{2}} \cdot dx}{(\sin x)^{\frac{3}{2}} + (\cos x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sin \overline{\frac{\pi}{2} - x}\right)^{\frac{3}{2}} dx}{\left(\sin \overline{\frac{\pi}{2} - x}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\cos \overline{\frac{\pi}{2} - x}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{\frac{3}{2}}\, dx}{(\cos x)^{\frac{3}{2}} + (\sin x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\ 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left[(\sin x)^{\frac{3}{2}} + (\cos x)^{\frac{3}{2}}\right]}{(\cos x)^{\frac{3}{2}} + (\sin x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = (x)_0^{\frac{\pi}{2}} \quad = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad I = \frac{\pi}{4}$$

எ. கா. 5.

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin \overline{\pi - x}}{1 + \cos^2 \overline{\pi - x}}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{(x \sin x)}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$\therefore \quad 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{d(-\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$= -\pi \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$\cos x = u$ எனப் பிரதியிட

$x = 0$ எனில் $u = 1$

$x = \pi$ எனில் $u = -1$

$$2\ I = -\pi \int_{+1}^{-1} \frac{du}{1+u^2} = \pi \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{du}{1+u^2},\quad 1+u^2 \text{ ஓர் இரட்டைச் சார்பு}$$

$$= 2\pi \left(\tan^{-1} u\right)_0^1 = 2\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi^2}{4}$$

எ. கா. 6.

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{(1+x^2)}\,dx$

$x = \tan\theta$ என ஈடு செய்ய

$dx = \sec^2\theta \cdot d\theta \qquad x = 1$ எனில் $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$x = 1$ எனில் $\theta = 0$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(1+\tan\theta)}{\sec^2\theta} \cdot \sec^2\theta \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)\ d$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\tan\overline{\frac{\pi}{4}-\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{1+\tan\theta+1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \frac{2}{1+\tan\theta}\ d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log 2)\ d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)\ d\theta$$

$$\therefore \quad 2\,I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log 2)\ d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2 = \frac{\pi}{4}\log 2$$

$\therefore \quad I = \frac{\pi}{8} \log 2.$

எ. கா. 7.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)$$

என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து

$\int_{\frac{\pi}{n}}^{(n-1)\frac{\pi}{n}} x \cdot \sin^{-2} x \cdot dx$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

இங்கு $a = \frac{\pi}{n}, b = (n-1)\frac{\pi}{n}$

$$(a+b-x) = \frac{\pi}{n} + (n-1)\frac{\pi}{n} - x = \pi - x$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{n}}^{(n-1)\frac{\pi}{n}} (\pi - x) \sin^3 (\pi - x)\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{n}}^{(n-1)\frac{\pi}{n}} \pi \cdot \sin^3 x \cdot dx - \int_{\frac{\pi}{n}}^{(n-1)\frac{\pi}{n}} x \cdot \sin^3 x \cdot dx$$

$$\therefore \quad 2I = \pi \int_{\frac{\pi}{n}}^{(n-1)\frac{\pi}{n}} \frac{(3 \sin x - \sin 3x)}{4}\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\pi \int_{\frac{\pi}{n}}^{(n-1)\frac{\pi}{n}} \sin x \cdot dx - \frac{\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{n}}^{(n-1)\frac{\pi}{n}} \sin 3x \, dx$$

$$= \frac{3\pi}{4}\Big(-\cos x\Big)_{\frac{\pi}{n}}^{(n-1)\frac{\pi}{n}} - \frac{\pi}{4}\Big(-\frac{\cos 3x}{3}\Big)_{\frac{\pi}{n}}^{(n-1)\frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{-3\pi}{4}\Big[\cos \overline{n-1}\,\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n}\Big]$$

$$+ \frac{\pi}{12}\Big[\cos 3\,(n-1)\frac{\pi}{n} - \cos\frac{3\pi}{n}\Big]$$

$$= \frac{3\pi}{4} \quad 2\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\Big)$$

$$- \frac{\pi}{12} \cdot 2\sin\frac{3\pi}{2} \cdot \sin\Big(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{n}\Big)$$

$$= \frac{3}{2}\pi \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{n} + \frac{}{6}\sin\Big(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{n}\Big)$$

$$= \frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{n}$$

எ. கா. 8.

மதிப்பிடுக. $\int_0^1 x^2 (1-x)^{16}\, dx$

$$\int_0^1 x^2 (1-x)^{16} dx = \int_0^1 (1-x)^2 (1-1+x)^{16} dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x + x^2)\, x^{16} \cdot dx$$

$$= \int_0^1 (x^{16} - 2x^{17} + x^{18})\, dx$$

$$= \left(\frac{x^{17}}{17}\right)_0^1 - 2\left(\frac{x^{18}}{18}\right)_0^1 + \left(\frac{x^{19}}{19}\right)_0^1$$

$$= \tfrac{1}{17} - \tfrac{2}{18} + \tfrac{1}{19}.$$

பயிற்சிகள் 33

1. $\int_a^b x f(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\, dx$ • எனக்காட்டுக.

மதிப்பிடுக :—

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)}\, dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x\, dx.$

4. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x}\, dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan\theta)\, d\theta$

6. $\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x)\, dx$

7. $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x}\, dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cdot dx}{\sin x + \cos x}$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$

$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx\right]$

10. $\int_0^2 x \sqrt{2 - x} \cdot dx.$

11. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_0^{b-a} f(x + a) \, dx$ என நிறுவுக.

12. $\int_a^b f(mx) \, dx = \frac{1}{m} \int_{ma}^{mb} f(x) \, dx$ என நிறுவுக.

13. $\int_0^1 x^n (1 - x)^m dx = \int_0^1 x^m (1 - x)^n dx$ என நிறுவி

$\int_0^1 x (1 - x)^m dx$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

14. $f(2a - x) = -f(x)$ அல்லது $+f(x)$ என முறையே இருக்கும் போது

$\int_0^{2a} f(x) \, dx = 0$ அல்லது $2 \int_0^a f(x) \, dx$ எனக் காட்டுக.

15. $\int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} \, dx$ என நிறுவி மதிப்பிடுக.

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos^2 x dx$ — மதிப்பிடுக.

17. $\int_0^2 x(Kx-1)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cdot \cos x \cdot dx$ என்றால்

K-ன் மதிப்பென்ன ?

(xiii) $\int_a^b f(x)\,dx$-ஐ ஒரு முடிவிலாத தொடரின் கூடுதலாகக் கருதுங்கால், $f(x)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு G என்றும், மீச்சிறு மதிப்பு ட என்றும் இருந்தால், தொகையின் மதிப்பு ட $(b-a)$-ஐ விட அதிகமாயும் $G\,(b-a)$-ஐ விடக் குறைவாகவுமிருக்கும்.

$$ட\,(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < G\,(b-a).$$

இந்த உண்மை அடுத்து வரும் வடிவ கணித விளக்கத்தி லிருந்து மேலும் தெளிவாகும்.

எ. கா.

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{10+x^3}\,dx$ ஆனது $1 \cdot 59$, $1 \cdot 62$ மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்டது எனக் காண்க.

$x = \frac{1}{2}$ என்றிட $\sqrt{10+x^3} = \sqrt{10+\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{81}{8}}$

$$= \frac{9}{\sqrt{8}}.$$

$x = 1$ என்றிட $\sqrt{10+x^3} = \sqrt{11}$

$\therefore$ தொகையின் மதிப்பு $\frac{9}{\sqrt{8}}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 59$ -ஐவிட அதிகம்.

$\sqrt{11}\,(1-\frac{1}{2}) = 1 \cdot 62$-ஐ விடக் குறைவு.

பயிற்சிகள் 34.

கீழ்க்காணும் தொகைகளின் எல்லைகளை மதிப்பிடுக.

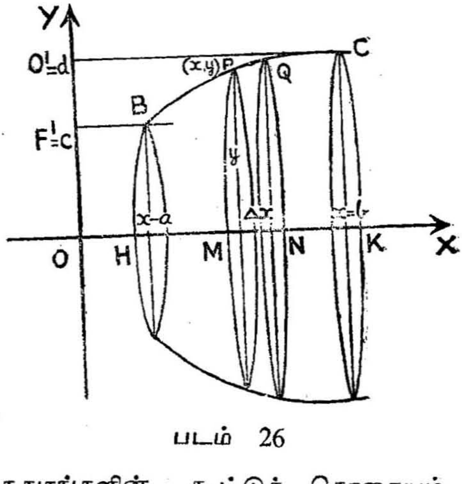
1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4-\cos^2 x)\,\frac{1}{3}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{8}\sin^2\theta}}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2+x^n}{1+x^n}\,dx.$

11. உருளைப் பருமம் (Volume of Revolution)

§ 36. ஒரு வளைவரை ஏதாவதொரு கோட்டையொட்டிச் சுற்றும்போதுண்டாகும் முப்பரிமாணப் பொருளை உருளைப் பருமம் (Volume of Revolution) என்று கூறுகிறோம்.

ப. 26-ல் பரப்பு *APQB* *x* அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போது, அங்கு காட்டப்பட்ட ஒவ்வொரு நீள் சதுரமும் ஒரு நேர்வட்ட உருளையையுண்டாக்கும். $Pr \times r+1$ என்ற நீள்வட்டம் $xr\ Pr$ ஆரையும், $xr \times r+1$ உயரமுள்ள ஒரு நேர்வட்ட உருளையையுண்டாக்கும். உள் நீள் சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகையும்,



படம் 26

வெளிநீள் சதுரங்களின் கூட்டுத் தொகையும் பொதுவாக ஒரே எல்லையான *APQB*-யின் பரப்பை நாடுவது போல, இங்கு உள் நீள் சதுரங்கள் சுற்றவுண்டாகும் நேர்வட்ட உருளைப் பருமங்களின் கூட்டுத் தொகையும், பொதுவாக, ஒரே எல்லையை நாடும் இவ்வெல்லை மதிப்பை பரப்பு *APQB* சுற்றுவதாலுண்டாகும் உருளைப் பருமமென்கிறோம்.

இங்கு படத்தில் $BHKC$ என்ற பரப்பு x-அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போதுண்டாகும் உருளைப் பருமம்

$= $ எல்லை Σ நீள்சதுரம் PN செய்யும் நேர்வட்ட உருளை

$= $ எல்லை $\Sigma\ (\pi MP^2 \cdot MN)$

$= $ எல்லை $\Sigma\ (\pi y^2 \cdot \Delta x)$

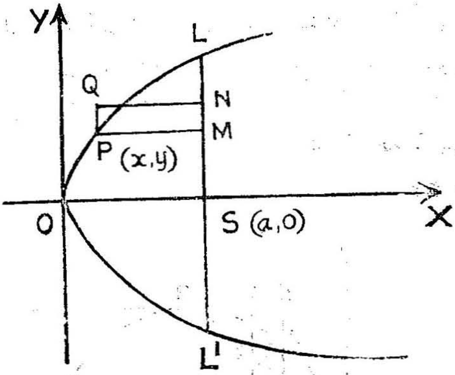
$= \int_a^b \pi y^2\, dx,\ a, b$ எல்லைகள்.

இதுபோலவே $BFQC$ என்ற பரப்பு y-அச்சையொட்டிச் சுற்றுவதாலுண்டாகும் உருளைப் பருமம் $\int_c^d \pi x^2\, dy$ ஆகும். c, d என்பன B-யிலும் C-யிலும் முறையே குத்தாய மதிப்புகள்.

குறிப்பு : x, y அச்சுகளல்லாது அவற்றிற்கிணையான வேறெந்த அச்சையொட்டி வளைவரை சுற்றினாலும் அப்பொழுதுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தை மேற்சொன்னவாறு காணலாம்.

உ. கா. 1.

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவிற்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் (latus rectum) இடைப்பட்ட பரப்பு செவ்வகலத்தை யொட்டிச் சுற்றுவதாலுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தைக் காண்க.



படம் 27

உருளைப்பருமம்

$= $ எல்லை Σ (நீள்சதுரம் PN செய்யும் நேர்வட்ட உருளைப் பருமம்)

$$= \text{எல்லை} \sum (\pi PM^2 \cdot MN)$$

$$= \text{எல்லை} \sum \pi (a - x)^2 \cdot \Delta y$$

$$= \int_{-2a}^{+2a} \pi (a - x)^2 \cdot dy = 2 \int_{0}^{2a} \pi (a - x)^2 \, dy$$

$$= 2\pi \int_{0}^{2a} \left(a - \frac{y^2}{4a} \right)^2 \cdot dy$$

$$= 2\pi \left[a^2 y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{80a^2} \right]_0^{2a}$$

$$= 2\pi \left[a^2 \cdot 2a - \frac{8a^3}{6} + \frac{32a^5}{80a^2} \right]$$

$$= 2\pi a \; [2 - \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{5}] = \tfrac{32}{15} \pi a^3$$

எ. கா. 2.

உருள்வளை $x = a\,(\theta - \sin\theta)$

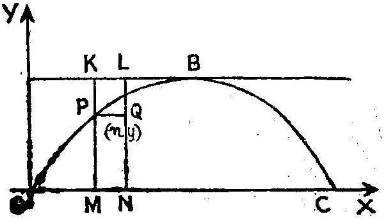
$y = a\,(1 - \cos\theta)$

(a) அடிக்கோட்டையொட்டிச் சுற்றும்போது

(b) உச்சியில் வரைந்த தொடு கோட்டையொட்டிச் சுற்றும் போது ஏற்படும் உருளைப் பருமத்தைக் காண்க.

(a) அடிக்கோட்டையொட்டி :

உருளைப்பருமம்



படம் 28

$$= \int \pi y^2 \cdot dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi a^2 (1 - \cos\theta)^2 \cdot a (1 - \cos\theta)\, d\theta.$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^3\, d\theta = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^3 d\theta$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{\theta}{2}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2$$

$$= 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \phi\, d\phi. \quad , \phi = \frac{\theta}{2}$$

$$= 16\pi a^3 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \phi\, d\phi$$

$$= 32\pi a^3 \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 \cdot a^3$$

(*b*) உச்சித் தொடு கோட்டையொட்டி :

உருளைப்பருமம் $=$ எல்லை $\Sigma \pi PK^2 \cdot KL$

$=$ எல்லை $\Sigma \pi (2a - y)^2 \cdot \triangle x$

$$= \int_0^{2\pi} \pi [2a - a(1 - \cos\theta)]^2 .$$

$$a (1 - \cos\theta)\, d\theta.$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 + \cos\theta)^2 \cdot (1 - \cos\theta)\, d\theta.$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 \cdot \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^3 d\theta$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^4 \frac{\theta}{2} \sin \frac{2\theta}{2}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot 2$$

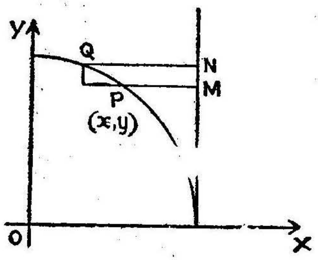
$$= 16\pi a^3 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \phi \sin^2 \phi\, d\phi \left[\phi = \frac{\theta}{2}\right]$$

$$= 32\pi a^3 \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$\pi^2 a^3$.

எ. கா. 3.

ஒரு கால்வட்டம் அதன் ஒரு முனையில் வரைந்த தொடுகோட்டை யொட்டிச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப் பருமத்தைக் காண்க.



படம் 29

வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

உருளைப் பருமம்

$$= \text{எல்லை } \Sigma\, (\pi\, PN^2 \cdot MN)$$

$$= \text{எல்லை } \Sigma\, \pi\, (a - x)^2 \cdot \triangle y$$

$$= \int_0^a \pi\, (a - x)^2 \cdot dy$$

$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$ என ஈடு செய்தால்

எல்லை $y = 0$ என $\theta = 0$, $y = a$ என, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \text{ பருமம் } = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\, (a - a\cos\theta)^2 \cdot a\cos\theta \cdot d\theta.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi a^3 (1 - \cos\theta)^2 \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) \cos\theta \cdot d\theta.$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - 2\cos^2\theta + \cos^3\theta)\, d\theta.$$

$$= \pi a^3 \left[1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1\right]$$

$$= \pi a^3 \left[\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{6} a^3 (10 - 3\pi)$$

எ. கா. 4.

$(a - x)y^2 = a^2x$-க்கும் அதன் அணுகு கோட்டிற்கும் இடையிலுள்ள பகுதி அணுகுகோட்டை யொட்டிச் சுற்ற வுண்டாகும் பருமத்தைக் காண்க.

$y^2 = \frac{a^2 x}{a - x}$ என்ற வளைவரையில்

$x = 0$ எனில், $y = 0$ $\therefore$ வளைவரை ஆதிவழியே செல்கிறது.

$x = a$ எனில் $y^2 = \infty$; $y = \pm \infty$ $\therefore$ $x = a$. அணுகு கோடு $x < 0$ எனில், $y^2 =$ குறைமதிப்பு. $\therefore$ Y-அச்சுக்கு இடது பக்கமாக வளைவரை செல்லாது.

படத்தில் $OA = a$, புள்ளி $P\ (x, y)$

$\therefore$ $PM = a - x.$

பருமம் $=$ எல்லை $\Sigma\,(\pi\, PM^2 \cdot MN)$

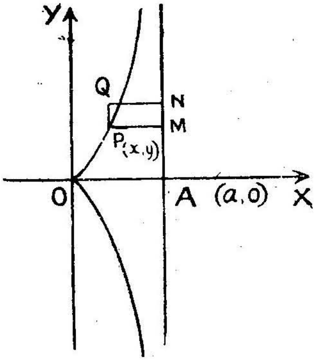
$= $ எல்லை $\Sigma\ \pi\ (a - x)^2 \cdot \triangle y$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\, (a - x)^2 \cdot dy$$

$$y^2 (a - x) = a^2 x$$

$$a y^2 = x (a^2 + y^2) \quad \therefore \quad x = \frac{ay^2}{a^2 + y^2}$$

$$\therefore \text{ பருமம் } = 2 \int_0^{\infty} \pi \left(a - \frac{ay^2}{a^2 + y^2}\right)^2 dy$$



படம் 30

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{a^6}{(a^2 + y^2)^2}\, dy$$

$y = a \tan\theta$ எனப் பிரதியிட $dy = a \cdot \sec^2\theta \cdot d\theta$.

எல்லை $y = 0$ எனில் $\theta = 0$; $y = \infty$ எனில் $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \text{ பருமம் } = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^6 \cdot a \sec^2\theta \cdot d\theta}{a^4 \cdot \sec^4\theta}$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot d\theta = 2\pi a^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi^2 a^3}{2}$$

எ. கா. 5.

a ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தை, அதன் மையத்திலிருந்து $\frac{a}{2}$ தூரத்தில் ஒரு சமதளம் இரு பகுதிகளாக வெட்டினால், அவற்றின் பருமங்களின் விகிதம் 5 : 27 எனக் காட்டுக.

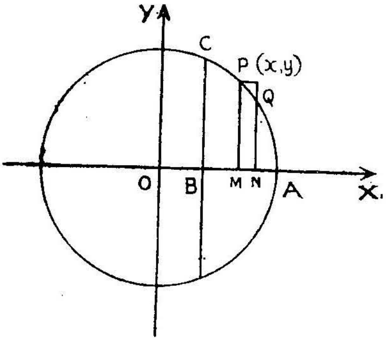
கோளத்தின் வெட்டு முக வட்டம்

$$x^2 + y^2 = a^2$$

சமதளம் OA ஆரையை B-யில் செங்குத்தாக வெட்டட்டும்.

$OB = \frac{a}{2}$: X-அச்சை யொட்டி பரப்பு $APCB$ சுற்றும் போது ஏற்படும் உருளைப் பருமம் $=$ எல்லை $\Sigma\,(\pi\, MP^2 \cdot MN)$

$= $ எல்லை $\Sigma\,(\pi y^2 \cdot \triangle x)$



படம் 31

$$= \int_{\frac{a}{2}}^{a} \pi\,(a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_{\frac{a}{2}}^{a}$$

$$= \pi \left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{24}\right) \right]$$

$$= \pi a^3 \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{11}{24}\right) = \pi a^3 \tfrac{5}{24} = \tfrac{5}{24} \cdot \pi a^3.$$

கோளத்தின் பருமம் $= \frac{4}{3}\pi a^3$.

$\therefore$ மற்ற பகுதியின் பருமம் $= \pi a^3 \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{24}\right)$

$$= \pi a^3 \times \frac{27}{24} = \frac{27}{24}\pi a^3.$$

$\therefore$ இரு பருமங்களின் விகிதம்

$$= \frac{5}{24}\pi a^3 : \frac{27}{24}\pi a^3 = 5 : 27.$$

எ. கா. 6.

$4x^2 + 81y^2 = 324$ என்ற நீள்வட்டம் குத்தாயத்தை யொட்டிச் சுற்றும் போதுண்டாகும் பருமத்தைக் காண்க.

நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \therefore a = 9, b = 2$

y-அச்சைச் சுற்றுவதால்

$$\text{பருமம்} = \int_{-2}^{+2} \pi x^2 \cdot dy = 2\int_0^2 \pi x^2 \cdot dy$$

$x = 9 \cos\theta$, $y = 2 \sin\theta$ எனப்பிரதியிட

$$\text{பருமம்} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot 81 \cdot \cos^2\theta \cdot 2\cos\theta \cdot d\theta$$

$$= 324\,\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \cdot d\theta.$$

$$= 324\,\pi \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 1 = 216\pi.$$

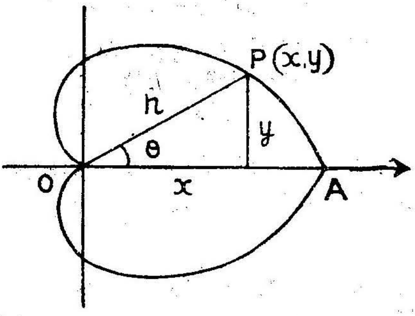
எ. கா. 7.

$r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளை அதன் அச்சை யொட்டிச் சுழலும் போதுண்டாகும் பருமத்தை மதிப்பிடுக.

$r = a\,(1 + \cos\theta)$ · நெஞ்சுவளையின் கோண தூரச் சமன்பாடு (Polar Equation) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ என மாற்ற,

$x = a\ (1 + \cos\theta) \cos\theta,\ y = a\ (1 + \cos\theta) \sin\theta.$

$dx = a\ (-\sin\theta - 2 \cos\theta \cdot \sin\theta)\ d\theta$



படம் 32

$= -a \sin\theta\ (1 + 2 \cos\theta)\ d\theta.$

$\theta = 0$ எனில், $x = 2a = OA$

$\theta = \pi$ எனில் $x = 0$

$$\text{பருமம்} = V = \int_0^{2a} \pi\ y^2 \cdot dx$$

$$= -\int_\pi^0 \pi\ a^2\ (1 + \cos\theta)^2 \cdot \sin^2\theta. \quad a \sin\theta\ (1 + 2 \cos\theta)\ d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^\pi (1 + 2 \cos\theta + \cos^2\theta)\ (1 + 2 \cos\theta) \sin^3\theta \cdot d\theta.$$

$$= \pi a^3 \int_0^\pi (1 + 4 \cos\theta + 5 \cos^2\theta + 2 \cos^3\theta) \sin^3\theta \cdot d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^\pi (1 + 5 \cos^2\theta) \sin^3\theta \cdot d\theta$$

[$\because$ $0 - \pi$ இடைவெளியில் $\cos \theta^{2n+1}$-ன் தொகை $= 0$]

$$= 2\pi a^3 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3} \cdot 1 \right)$$

$$= 2\pi a^3 \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{8}{3} \pi a^3.$$

பயிற்சிகள் 35—A

1. $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ என்ற வளைவரை x-அச்சை ஒட்டி ஒருமுறை சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப் பருமம் காண்க.

2. ஒரு கோளப் பகுதியின் அடிவட்ட ஆரம் c, உயரம் h என்றால் அதன் பருமம் $\frac{\pi h\ (3c^2 + h^2)}{105}$ என நிறுவுக.

3. $y^2\ (a + x) = x^2\ (3a - x)$ என்ற வளைவரையின் வளையம் (loop) x-அச்சைச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப் பருமம் காண்க.

4. $y^2 = x_2\ (1 - x^2)$ என்ற வளைவரையின் வளையம் x-அச்சைச் சுற்றும்போதுண்டாகும் உருளைப் பருமம் யாது ?

5. $y^4 = x^2\ (4 - x)$-ன் வளையம் x அச்சைச்சுற்றவுண்டாகும் உருளைப்பரும கனஅளவு யாது ?

6. $ay^2 = x^2$ என்ற வளைவரை, $x = 0$, $x = a$ இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள பரப்பு x-அச்சைச் சுற்றுவதாலுண்டாகும் உருளைப் பருமத்தைக் கணக்கிடு.

7. $x\ (x^2 + y^2) = a\ (x^2 - y^2)$ என்ற வளைவரையின் வளையத்தின் x-அச்சையொட்டிய உருளைப்பருமத்தை மதிப்பிடுக.

8. உயரம் h, அடிப்பக்க ஆரை r அளவுகளுள்ள நேர் வட்டக்கூம்பின் கனஅளவைக் காண்க.

9. பின்வரும் வளைவரைகளின் வளைவுகள் x அச்சைச் சுற்றும்போது வரும் உருளைப்பருமங்களைக் கணக்கிடுக.

(a) $y^2 = x^4\ (x + 2)$ (b) $ay^2 = x^2\ (a - x)$

10. $y^2 = x^3 + 5x$, $x = 2$, $x = 4$ இவற்றினிடையிலுள்ள பரப்பு x-அச்சையொட்டிச் சுழலும் போதுண்டாகும் உருளைப் பருமத்தைக் கணக்கிடுக.

பயிற்சிகள் 35—B

1. $4y^2 = 5x$ என்ற பரவளைவும், $x = 4$ என்ற இரட்டைக் குத்தாயம் இவற்றினிடையிலுள்ள பகுதி பரவளைவின் உச்சியில் வரைந்த தொடுகோட்டையொட்டிச் சுற்றும்போது ஏற்படும் பருமத்தின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ அதன் குற்றச்சை (Minor axis) யொட்டிச் சுழல ஏற்படும் உருளைப் பருமம் யாது ?

3. $y^2=4ax$ என்ற வளைவரைக்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் (latus rectum) உட்பட்ட பகுதி (a) இயக்குவரை (directrix) (b) உச்சியில் வரைந்த தொடுகோடு இவற்றையொட்டிச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தைக் கணக்கிடுக.

4. $y\ \sin x$, $x=0$, $x=\pi$ இவற்றிற்கிடைப்பட்ட பரப்பு x-அச்சையொட்டிச்சுற்ற வுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தைக் காண்க.

5. $y^2=4ax$, அதன் செவ்வகலத்தின் முனைகளில் வரையப் பட்ட தொடுகோடுகள், y அச்சு இவற்றாலடைபட்ட பரப்பானது பரவளைவின் அச்சைச் சுற்றும்போது ஏற்படும் பருமம் $\frac{2}{3}\pi a^3$ கன அலகுகள் எனக்காட்டுக.

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தை $x=\frac{a}{2}$ என்ற குத்தாயத்தால் பிரிக்கப்படும் சிறியபகுதி, இக்குத்தாயத்தைச் சுற்றும்போது ஏற்படும் பருமம் $\pi a^2\cdot b\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$ எனக் காட்டுக.

7. $r=2+\cos\theta$ அதன் தொடக்கக்கோட்டை ஒரு முறை சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தை மதிப்பிடுக.

8. $60°$ மையக்கோணமுள்ள ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதி அதன் நடு ஆரையையொட்டிச் சுழலும்போதுண்டாகும் உருளைப் பருமத்தைக் கணக்கிடுக.

9. ஒருபக்கம் a நீளமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணம் அதன் ஒரு பக்கத்தையொட்டிச்சுற்ற ஏற்படும் உருளைப்பருமம் யாது ?

10. வளைவரை $y=C\cos h\frac{x}{c}$, x அச்சு, $x=\pm C$ என்ற குத்தாயங்கள் இவற்றிற்கிடைப்பட்ட பரப்பு x-அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தைக் காண்க.

11. r-ஆரையுள்ள ஒருவட்டம் தொடுகோட்டையொட்டிச் சுழலும் போதுண்டாகும் உருளைப்பருமம் யாது ?

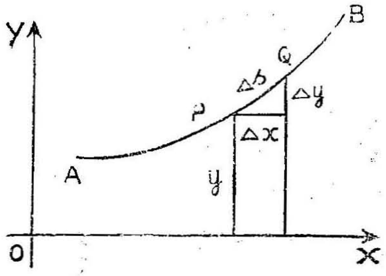
12. $y=e^{-x}$ என்ற வளைவரைக்கும், அச்சுகளுக்குமிடைப் பட்ட பரப்பு அச்சுகளை யொட்டிச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப்பருமங்களை ஒப்பிடுக.

§ 37. வளைவரையின் நீளம் (Length of a curve)

ஒரு வளைவரையின் நீளத்தைக்காண அதைப் பல நுண் பகுதிகளாக்கி அடுத்துவரும் அண்மைப் புள்ளிகளை நாண்களால் இணைத்திடுக. இவற்றில் மீப்பெருநாணின் எல்லை 0-ஐ நாடும் போது இந்நாண்களின் கூட்டுத்தொகையின் எல்லையை வளைவரையின் நீளமென்கிறோம்.

வில் AB-யின் நீளம் s,

வில் $PQ = \Delta s$,



படம் 33

(x, y), $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ என்பன P, Q புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்கள் என்றால்,

$$s = \text{எல்லை } \Sigma\, PQ$$

$$= \text{எல்லை } \Sigma \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad \text{(i)}$$

$$= \text{எல்லை} \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$ A, B, புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்கள்

(i) ஐ, $s = \text{எல்லை} \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2} \cdot \Delta y$ அல்லது

ராமாறி t-ன் சார்பாகக் கொடுத்திருந்தால்

$$s = \text{எல்லை} \sum \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$$

என்றுங் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

t_1, t_2 என்பன A, B என்ற புள்ளிகளில் t-ன் மதிப்புகளாகும்.

எ. கா. 1.

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின் நீளத்தை உச்சியிலிருந்து வளைவரையின் மேலுள்ள (x_1, y_1) புள்ளிவரையில் காண்க.

$$y^2 = 4a \ , \ x = \frac{y^2}{4a} \quad \therefore \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2a}$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{y_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$

$$= \int_0^{y_1} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4a^2}}\, dy = \frac{1}{2a} \int_0^{y_1} \sqrt{(2a)^2 + y^2} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\frac{y}{2} \sqrt{4a^2 + y^2} + \frac{4a^2}{2} \sinh^{-1} \frac{y}{2a} \right]_0^{y}$$

$$= \frac{1}{4a} \left[y_1 \sqrt{4a^2 + y_1^2} + 4a^2 \sinh^{-1} \frac{y_1}{2a} \right]$$

எ கா 2.

$x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற உருள்வளையின் நீளத்தை மதிப்பிடுக.

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a\sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} \, . \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos\theta} \cdot d\theta$$

$$= \sqrt{2} \cdot a \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2} \cdot d\theta$$

$$= a \cdot 2 \cdot 2 \left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -4a(-1-1) = 8a$$

எ. கா. 3.

$\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ இடைவெளியில் $x = e^{\theta} \cdot \sin\theta$, $y = e^{\cdot\theta^2} \cos\theta$ வளைவரையின் நீளம் காண்க.

$$\frac{dx}{d\theta} = e^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta); \; \frac{dy}{dx} = e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\therefore \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = e^{2\theta}[(\sin\theta + \cos\theta)^2$$

$$+ (\cos\theta - \sin\theta)^2]$$

$$= e^{2\theta} \times (2)$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cdot e^{\theta} \cdot d\theta = \sqrt{2} \cdot \left(e^{\theta}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right)$$

எ. கா. 4.

வளைவரை $3y = \sqrt{x}\,(x - 3)$-ன் நீளத்தை $x = 0$, $x = 9$ என்ற எல்லைகளில் கணக்கிடுக.

$$3y = \sqrt{x}\,(x - 3) = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(x - 2 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$\therefore \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\therefore \quad s = \int_0^9 \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right]_0^9$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\,9^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot 9^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}(18+6)$$

$$= \tfrac{24}{2} = \mathbf{12}$$

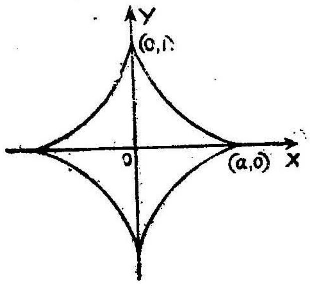
எ. கா. 5.

$x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ என்ற வளைவரை சுற்றளவைக் காண்க.

$$x = a\cos^3\theta. \qquad \therefore\ \cos\theta = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$y = a\sin^3\theta. \qquad \sin\theta = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$



படம் 34.

வளைவரையின் உருவம் படத்தில் அச்சுகளையொட்டிச் சீராக உள்ளதால் ஒரு நாற்கூறுப் பகுதியின் நீளத்தை மட்டும் காண்போம்.

$\theta = 0$ எனில் $x = a\,;\ y = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ எனில் $x = 0\,;\ y = 1$

$$\frac{dx}{d\theta} = 3a \cdot \cos^2\theta\,(-\sin\theta),\ \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta \cdot \cos\theta.$$

$$\therefore\ \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 9a^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\therefore\ \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 3a \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta.$$

இப்போது நாற்கூறுப் பகுதி $s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$

$$= 3a \left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} a \cdot 1$$

∴ முழுச் சுற்றளவு $= 4 \times \frac{3}{2} \cdot a = 6a$

எ. கா. 6.

$4y^2 = (x+2)^3$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தை $x = 2$, $x = 7$ என்ற இடைவெளியில் கணக்கிடுக.

$$4y^2 = (x+2)^3, \; y = \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{2} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16}(x+2) = \frac{16 + 9x + 18}{16}$$

$$= \frac{9x + 34}{16}$$

$$\therefore \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{9x + 34}$$

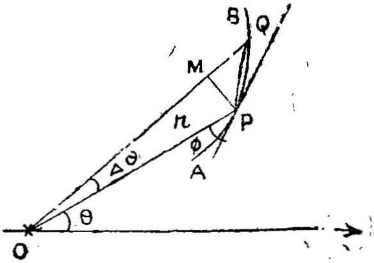
இப்போது $s = \int_2^7 \frac{1}{4}\sqrt{9x+34}\, dx =$

$$\left[\frac{1}{4}\frac{(9x+34)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{9}\right] = \frac{1}{54}\left[(9x+34)^{\frac{3}{2}}\right]_2^7$$

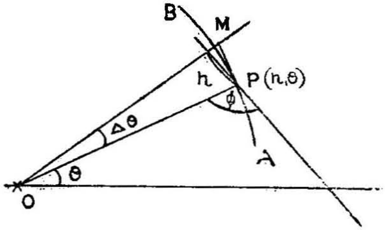
$$= \tfrac{1}{54}\left[(63+34)^{\frac{3}{2}} - (18+34)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \tfrac{1}{54}\left(97^{\frac{3}{2}} - 52^{\frac{3}{2}}\right)$$

§ 38. கோண தூர அளவுகளில் வளைவரையின் நீளம்.



படம் 35-(i)



படம் 35-(ii)

வளைவரையில் P, Q என்பன (r, θ), $(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$ என்ற கோணதூர அளவுகளுள்ள இரு புள்ளிகள். OQ-க்குச் செங்குத்தாக PM வரையப்பட்டுள்ளது. படம் (i)-ல் θ அதிகரிக்க, r-ம் அதிகரிக்கின்றது. படம் (ii)-ல் θ அதிகரிக்க, r குறைகின்றது. ஆனால் இரண்டிலும் நாண்

$$PQ = PM . \operatorname{cosec} M\hat{Q}P.$$

$\therefore$ வில் $AB = s =$ எல்லை Σ (நாண் PQ)

$$= \text{எல்லை } \Sigma\, (PM \cdot \operatorname{cosec} M\hat{Q}P)$$

$$= \text{எல்லை } \Sigma\, (r \sin \Delta\theta . \operatorname{cosec} M\hat{Q}P)$$

$$= \text{எல்லை } \Sigma \left(r \Delta\theta . \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \operatorname{cosec} M\hat{Q}P \right)$$

ஆனால் $\Delta\theta \to 0$ எனில் $\frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \to 1$,

$M\hat{Q}P \to \phi$ (i) அல்லது $\pi - \phi$ (ii)

$\operatorname{cosec} M\hat{Q}P \to \operatorname{cosec} \phi$.

$\therefore$ Σ (PQ) ஒரு எல்லையை நாடுவதாகக் கொண்டு

வில் $AB = s = \int_{\alpha}^{\beta} r \operatorname{cosec} \phi \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} r \sqrt{1 + \cot^2 \phi} \, d\theta$.

ஆனால் $\tan \phi =$ எல்லை $\tan \angle MQP$

$$= \text{எல்லை } \frac{r\triangle\theta}{\triangle r} = r.\frac{d\theta}{dr}$$

$$\therefore \quad \cot\phi = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}$$

இப்போது, $s = \int_{\alpha}^{\beta} r\sqrt{1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$

$= \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$ எனவாகும்.

இங்கு α, β என்பவை A, B புள்ளிகளின் ஆரக் கோணங்கள்.

குறிப்பு : $\sin\phi = r\frac{d\theta}{ds}$; $\cos\phi = \frac{dr}{ds}$ என்ற வாய்பாடுகள் இங்கு கவனத்திற்குரியவை.

எ. கா.

$r = a\ (1+\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளையின் சுற்றளவைக் காண்க.

$$s = 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

$$r = a\ (1+\cos\theta),\ \frac{dr}{d\theta} = -\ a\sin\theta$$

$$\therefore \quad r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2\ (1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta$$

$$= 2a^2 + 2a^2\cos\theta = 2a^2\ (1+\cos\theta)$$

$$= 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = 2a \cos\frac{\theta}{2}$$

சுற்றளவு, $$s = 2\int_0^{\pi} 2a \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4a \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}}\right)_0^{\pi} = 8\,a\,(1-0)$$

$$= 8a$$

பயிற்சிகள் 36

1. $4y^2 = x^3$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தை $x = 0$, $x = 1$ எல்லையில் மதிப்பிடுக.

2. $3ay^2 = x\,(x - a)^2$ என்ற வளைவரையின் வளையத்தின் சுற்றளவைக் கணக்கிடுக.

3. $x = a\,(\theta + \sin\theta)$, $y = a\,(1 + \cos\theta)$ என்ற வளை வரையின் ஒரு வளைவின் நீளமென்ன ?

4. $8a^2\,y^2 = x^2\,(a^2 - 2x^2)$ என்ற வளைவரையின் முழு நீளத்தை மதிப்பிடுக.

5. $r = a$ யிலிருந்து $r = 2a$ வரையில் $r^2 - 2ar \cdot \theta + a^2 = 0$ என்ற வளைவரையின் நீளம் யாது ?

6. $y = \log\,(\sec x)$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தை $x = 0$ விலிருந்து $x = \frac{\pi}{3}$ வரையில் காணவும்.

7. $\phi = 0$-விலிருந்து $\phi = \frac{\pi}{4}$ வரையில் $x = \sqrt{2}\,\sin^2\phi$, $y = \sqrt{2}\cos^2\phi$ என்ற நேர்கோட்டின் நீளத்தைத் தொகையீட்டு முறையில் கணக்கிடுக.

8. $x = 0$-விலிருந்து $x = c$ வரையில் $y = c\,\cosh\frac{x}{c}$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

9. $y = x^2$ என்ற பரவளையின் நீளத்தை (1, 1)-லிருந்து (2, 4) வரை காண்க.

10. $r(1 + \cos\theta) = 2a$-ன் நீளத்தை $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ இடையில் கணக்கிடுக.

11. $r = a \cos^3 \frac{\theta}{3}$ என்ற வளைவரையின் சுற்றளவைக் காண்க.

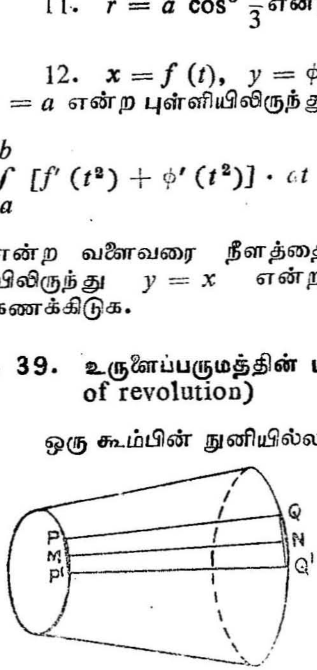
12. $x = f(t)$, $y = \phi(t)$ என்ற வளைவரையின் நீளம் $t = a$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $t = b$ வரையில்

$$\int_a^b [f'(t^2) + \phi'(t^2)] \cdot dt$$ என நிறுவி, $x = (1 - t)^2$, $y = t^2$

என்ற வளைவரை நீளத்தை, அது y-அச்சைத்தொடும் புள்ளியிலிருந்து $y = x$ என்ற கோட்டை வெட்டும் வரையில் கணக்கிடுக.

§ 39. உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பு (Surface Area of a solid of revolution)

ஒரு கூம்பின் நுனியில்லாத வெட்டுத் துண்டத்தின் (Frustum) இருவெட்டு முகங்களும் வட்டமானவை. அவ்வட்டங்களுள் ஒழுங்கான, ஒன்றுபோலமைந்த வடிவொத்த (similar and similarly situated) பல கோணங்கள் வரைந்து அவற்றின் நேர்நிலையான (corresponding) முனைகள் PQ, $P'Q'$,......இவற்றை இணைத்தால், $PP'Q'Q$ போன்று பல சரிவகங்கள் ஏற்படும்.



படம் 36

MN என்பது சரிவகம் $PP'Q'Q$-ன் உயரமெனில்

$$PP'Q'Q\text{-ன் பரப்பு} = \tfrac{1}{2}(PP' + QQ') \cdot MN$$

இதுபோன்ற n சரிவகங்களின் மொத்தப் பரப்பு

$$= \tfrac{1}{2} \cdot n\, (PP' + QQ') \cdot MN$$ ∵ பல கோணத்தின் பக்கங்கள் சமம்

$$= \tfrac{1}{2} \left(\begin{array}{c}\text{இரு பல கோணங்களின்} \\ \text{சுற்றளவுகளின் கூடுதல்}\end{array} \right) \cdot MN.$$

$n \to \infty$ ஆகும்போது பல கோணங்களின் சுற்றளவுகள் வெட்டுமுக வட்டங்களின் சுற்றளவுகளை நெருங்கும். $MN \to PQ$-ஐ நெருங்கும்.

$\therefore$ n சரிவகங்களின் பரப்புகளின் கூடுதல்

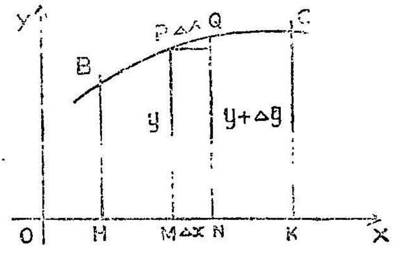
$\to \frac{1}{2} PQ$ (வெட்டுமுக வட்டங்களின் சுற்றளவுகளின் கூடுதல்)

இதைக் கூம்பின் வெட்டுத் துண்டத்தின் (Frustum) புறப் பரப்பென்கிறோம். கூம்பின் அச்சையொட்டி PQ சுழல்வதால் இப்புறப்பரப்பு உண்டாகிறதென்றும் கூறலாம்.

படம் 37-ல் வளைவரை x–அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போது PQ போன்ற ஒவ்வொரு நாணும் ஒரு கூம்பு வெட்டின் (Frustum) புறப்பரப்பை உண்டாக்குகின்றது. $PQ \to 0$ என்றால் கூம்பு வெட்டுத்துண்டங்களின் புறப்பரப்புகளின் கூடுதல் ஒரு எல்லையை நெருங்கும். இவ்வெல்லை மதிப்பை, $BHKC$ என்ற பரப்பு x-அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பென்கிறோம்.

உருளைப் பருமத்தின் புறப்பரப்பு

$$S = \text{எல்லை} \sum PQ \times \tfrac{1}{2} \times [2\pi y + 2\pi (y + \triangle y)]$$



படம் 37

$$= \text{எல்லை} \sum PQ \cdot 2\pi \left(y + \frac{\triangle y}{2}\right)$$

$$= \text{எல்லை} \sum 2\pi \left(y + \frac{\triangle y}{2}\right) \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}$$

$$= \text{எல்லை} \sum 2\pi \left(y + \frac{\triangle y}{2}\right) \cdot \triangle s$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} 2\pi\ y \cdot ds \qquad \text{...(i)}$$

மற்றும் S $=$ எல்லை $\Sigma\ 2\pi \left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$$= \text{எல்லை}\ \Sigma\ 2\pi \left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

$$= \int_{x_1}^{x^2} 2\pi\ y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \qquad \text{...(ii)}$$

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi\ y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy \qquad \text{...(iii)}$$

$$= \int_{t_1}^{t^2} 2\pi\ y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt \qquad \text{...(iv)}$$

இங்கு s_1, s_2 ; t_1, t_2 ; (x_1, y_1) ; $(x_2\ y_2)$ என்பவை முறையே B, C புள்ளிகளைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு : வளைவரை y-அச்சையொட்டிச் சுற்றிலுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பு

$$\int_{s_1}^{s^2} 2\pi x \cdot ds$$

எ. கா. 1.

r ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தை அதன் மையத்திலிருந்து ஒரு புறமாக முறையே b, c தூரங்களிலுள்ள சம தளங்கள் வெட்டும் பகுதியின் புறப்பரப்பைக் கணக்கிடுக.

x-அச்சு, $x = b$, $x = c$ என்ற குத்தாயங்கள் $x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டம் இவற்றிற்கிடைப்பட்ட பரப்பு x-அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போது இவ்வெட்டுப் பகுதி கிடைக்கிறது.

∴ வெட்டுப்பகுதியின் புறப்பரப்பு

$$S = \int_b^c 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$$x^2 + y^2 = r^2;\ 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{y}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r}{y}$$

$$\therefore\ S = \int_b^c 2\pi y \cdot \frac{r}{y} \cdot dx = 2\pi r \int_b^c dx$$

$$= 2\pi r\,(c - b)$$

இங்கு $c - b$ = இருதளங்களுக்கிடைத்தூரம்

$c - b$ = விட்டம் $2r$ என்றிட்டால்

$S = 2\pi r\,(2r) = 4\,\pi r^2$, கோளத்தின் புறப்பரப்பாகும்.

எ. கா. 2.

$x^2 = 4ay$ என்ற பரவளைவை அதன் செவ்வகலம் (latus rectum) வெட்டிய பகுதி y-அச்சையொட்டிச் சுற்றுவதால் ஏற்படும் உருளைப் பருமத்தின் புறப்பரப்பைக் காண்க.

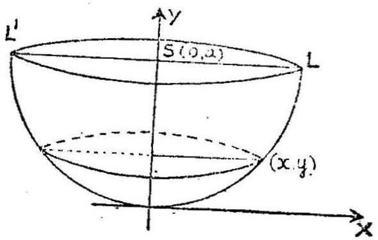
பரவளைவு

$$x^2 = 4ay$$

$$\therefore\ x = 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a}{y}}.$$

$$\therefore\ S = \int_0^a 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$



படம் 38

$$S = 2\pi \int_0^a x \sqrt{1 + \frac{a}{y}} \cdot dy$$

$$= 2\pi \int_0^a x \frac{\sqrt{y+a}}{\sqrt{y}} \cdot dy = 2\pi \int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{a+y} \cdot dy$$

$$= 4\pi \sqrt{a} \cdot \frac{2}{3}\Big[(a+y)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^a$$

$$= \frac{8}{3}\pi \sqrt{a}\left[(2a)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right]$$

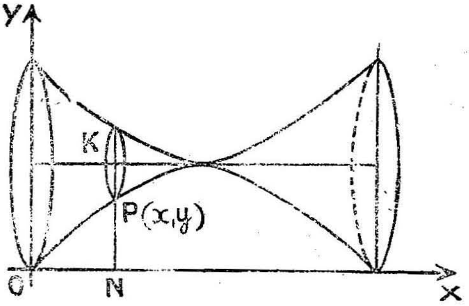
$$= \frac{8}{3}\pi \sqrt{a} \cdot a^{\frac{3}{2}}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{8}{3}\pi a^2 (2\sqrt{2} - 1)$$

எ. கா. 3.

உருள்வளை $x = a(\theta - \sin\theta)$ $y = a(1 - \cos\theta)$. அதன் உச்சியிலுள்ள தொடுகோட்டையொட்டிச் சுழலும் போதுண்டாகும் உருளைப் பருமத்தின் புறப்பரப்பைக் கணக்கிடுக.

உருள்வளையின் மேலுள்ள (x, y) என்ற ஏதேனுமொரு புள்ளி K-ஐ மையமாகவும் KP-ஐ ஆரையாகவும் உடைய ஒரு வட்டத்தை உண்டாக்கும்.

$$\therefore \quad S = \int_0^{2\pi} 2\pi \, PK \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta$$



படம் 39

$$PK = 2a - y = 2a - a\,(1 - \cos\theta)$$

$$= a + a\cos\theta = 2a \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\,(1 - \cos\theta) = 2a \sin^2 \frac{\theta}{2}\,, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2a \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad S = \int_0^{2\pi} 2\pi \cdot 2a \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot 2a \sin \frac{\theta}{2} \cdot d\theta$$

$$= 8\,\pi a^2 \int_0^{\pi} 2 \cos^2 \phi \cdot \sin \phi \, d\phi \,; \; \phi = \frac{\theta}{2}$$

$$= 16\,\pi a^2 \left[- \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{-16\,\pi a^2}{3} (-1 - 1)$$

$$= \frac{32}{3}\,\pi a^2.$$

எ. கா. 4.

$r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவலை அதன் தொடக்கக் கோட்டையொட்டிச் சுற்ற ஏற்படும் உருளைப் பருமத்தின் புறப் பரப்பு யாது ?

புறப்பரப்பின் துருவ ஆய அளவு வாய்பாடு

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\},\quad S = \int 2\pi y \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2(1+\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2$$

$$= a^2[1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta]$$

$$= 2a^2(1+\cos\theta) = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$y = r\sin\theta\ a(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta$$

$$= 2a\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 4a\cdot\cos^3\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}$$

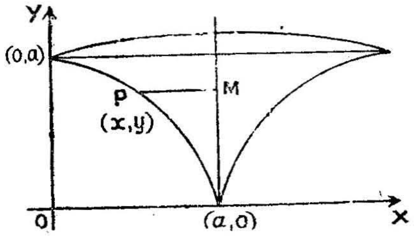
$$\therefore\ S = \int_0^{\pi} 2\pi\cdot 4a\cos^3\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,dx\left(\frac{\theta}{2}\right)2.$$

$$= 32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\phi\sin\phi\,d\phi\ ;\quad \phi = \frac{\theta}{2}$$

$$= 32\pi a^2\cdot\frac{3\cdot 1}{5\cdot 3}\cdot 1 = \frac{32}{5}\pi a^2$$

எ. கா. 5.

ஒரு வட்டத்தின் நாற்கூறுப் பகுதி (Quadrant) அதன் ஒரு முனையிலுள்ள தொடுகோட்டை யொட்டிச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பென்ன ?



படம் 40

வட்டத்தின் சாராமாறிச் சமன்பாடுகள் (Parametric equations)

$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta$$

$$= \sqrt{(-a\sin\theta)^2 + (a\cos\theta)^2} \cdot d\theta = a \cdot d\theta.$$

$$S = \int 2\pi \cdot PM \cdot ds = 2\pi \int (a - x)\, ds$$

$$= 2\pi \int (a - a\cos\theta)\, ds$$

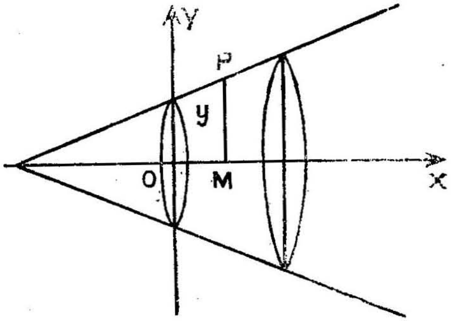
$$= 2\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\theta) \cdot a\, d\theta$$

$$= 2\pi a^2 \left[\theta - \sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi a^2 [\pi - 2]$$

எ. கா. 6.

$2y = x - 4$ என்ற நேர்கோட்டின் $x = 0, x = 5$ என்ற எல்லைக்குள் உள்ள பகுதி x-அச்சையொட்டிச் சுழலும்போது ஏற்படும் நேர்வட்டக் கூம்பின் துண்டத்தின் புறப்பரப்பைக் கணக்கிடுக.



படம் 41

$$2y = x - 4$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$s = \int 2\pi y \cdot ds$$

$$= \int_0^5 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^5 2\pi y \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot dx = \sqrt{5}\,\pi \int_0^5 \frac{(x-4)}{2} \cdot dx$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \pi \left[\frac{(x-4)^2}{2} \right]_0^5$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{4}\pi\,[\,1^2 - (-4)^2\,]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{4}\pi\,(1 - 16) = -\frac{15\sqrt{5}}{4}\pi$$

$$= \frac{15\sqrt{5}}{4}\pi \text{ (— குறியை நீக்கி)}$$

பயிற்சிகள் 37

1. $r = a\,(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளை தொடக்கக் கோட்டை யொட்டிச்சுற்ற ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தின் வளை பரப்பைக் காண்க.

2. $x = a\,(t - \sin t),\ y = a\,(1 - \cos t)$ என்ற உருள்வளை அதன் அடிப் பக்கத்தைச் சுற்ற ஏற்படும் உருளைப் பருமத்தின் புறப்பரப்பு யாது ?

3. $6xy = x^4 + 3$ என்ற வளைவரை $x = 1, x = 3$ என்ற எல்லைகளுக்கிடையே சுழலும்போதுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பை மதிப்பிடுக.

4. ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பை ஒரு சமதளம் 3 : 1 என்ற விகிதத்தில பிரிக்கிறது. கோளத்தின் ஆரை r எனக் கொண்டு மையத்திலிருந்து தளத்தின் தொலைவைக் காண்க.

5. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$ என்ற வளைவரை y அச்சைச் சுற்றும்போது $x = 0,\ x = a$ என்ற எல்லைகளில் உருளைப் பருமத்தின் புறப்பரப்பைக் கணக்கிடுக.

6. $x^2 + 4y^2 = 16$ என்ற நீள்வட்டம் x-அச்சைச் சுற்றும் போதுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பை மதிப்பிடுக.

7. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ என்ற வளைவரை x-அச்சைச் சுற்றும்போதுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பு எவ்வளவு ?

8. $x = 0,\ x = 2$ என்ற எல்லைகளில் $y^2 - x^2 = 8$ என்ற வளைவரை x-அச்சைச் சுற்றவுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப் பரப்பு $\pi\,[2 + \sqrt{2}\log(\sqrt{2} + 1)\,]$ எனக் காட்டுக.

9. $y = \sin x$ என்ற வளைவரை $x = 0, \pi$ எல்லைகளில் x-அச்சைச் சுற்றிவரும்போதுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப் பரப்பு $2\pi\,[\,\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}\,]$ எனக் காட்டுக.

10. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின் உச்சியிலிருந்து அதன் செவ்வகலத்தின் ஒருமுனைவரை உள்ள பகுதி x-அச்சைச் சுற்றும் போதுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பளவைக் காண்க.

11. $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\theta$ என்ற வளைவரை அதன் தொடக்கக் கோட்டையொட்டிச் சுழலும்போது ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பைக் காண்க.

12. $a^2 y = x^3$ என்ற வளைவரை x-அச்சினைச் சுற்ற உண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பை $x = 0, x = a$ எல்லைகளில் மதிப்பிடுக.

13. $x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}$ என்ற வளைவரையின் வளையம் (loop) x-அச்சினைச் சுற்றும்போது உருவாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பு யாது?

14. $3ay^2 = x\ (x - a)^2$ என்ற வளைவரையின் வளையம் x-அச்சைச் சுற்றவுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பைக் கணக்கிடுக.

15. $r = e^{\theta}$ என்ற வளைவரை $\theta = 0, \theta = \pi$ எல்லைகளில் தொடக்கக்கோட்டையொட்டிச் சுழல ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பைக் காண்க.

12. புவிக்கவர்ச்சி மையம்

(Centre of Gravity)

§ 40. வரையறை

(x, y) என்ற புள்ளியில் m நிறையுள்ள ஒரு பொருளிருப்பின், y, x ஆயங்களைச் சுற்றி அதன் சுழல் திறன்கள் முறையே mx, my ஆகும். அது போலவே ஒரே தளத்தில் $(x_1\ y_1)$ $(x_2\ y_2)$...என்ற புள்ளிகளிலுள்ள $m_1\ m_2$......என்ற பொருள்களின் கூட்டுச் சுழல் திறன் y, x ஆயங்களைச் சுற்றி முறையே

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots\ldots = \Sigma\,(mx)\,;$$

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots = \Sigma\,(my)$$ எனவாகும்.

$$\bar{x} \cdot \Sigma m = \Sigma\,(mx);\ \bar{y}\ \Sigma m = \Sigma(my) \qquad \ldots\ (1)$$

என்ற சமன்பாடுகளாக்கினால், $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற ஆயத்தொலைவுகள் கொண்ட ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கலாம். இப்புள்ளியை **நிறை மையம்** (Centre of Mass) என்கிறோம்.

பொருட்கள், தனித்திராமல் தொடர்ந்து ஒரே பொருளாக இருக்குமானால் சுழல் திறன்களின் கூடுதலானது ஒரு வரையறுத்த தொகையாகும். இப்போது நிறை மையம் காணும் சமன்பாடுகள்

$$M\bar{x} = \int x\,(dm)$$

$$M\bar{y} = \int y\,(dm) \qquad \ldots(2)$$ எனவாகும்.

இங்கு (dm) என்பது (x, y) என்ற புள்ளியிலுள்ள நுண்ணிய பொருளின் நிறையாகும். $M = \Sigma\,(dm)$ என்பது முழுப் பொருளின் நிறையாகும்.

கொள்கை : (1) (2) விதிகளில் பொருள்களின் கூட்டம் ஒரே தளந்திலுள்ளதாகவும், அத்தளத்திற்கு இருபுறமும் சமச் சீராகவும்

கட்டிறுக்கமாகவும் (rigid) அந்த தளத்திலமைந்த செங்குத்தான இரு கோடுகளை ஆயங்களாகப் பெற்றதாகவும் கொள்ளவேண்டும்.

§ 41. புவிக்கவர்ச்சி மையம் :

(i) பொருள் சம அடர்த்தியுள்ள மெல்லிய தகடானால் (lamina), அடர்த்தியை ρ என்ற மாறிலியாகவும் பரப்பை A என்ற மாறியாகவும் கொண்டு நிறைமையச் சமன்பாடுகள்

$(\rho A)\bar{x} = \int x(\rho\, dA)$; $(\rho\, A)\bar{y} = \int y\,(\rho \cdot dA)$ எனவும், பொதுக்காரணி P-வை நீக்க,

$A \cdot \bar{x} = \int x\,(dA)$; $A \cdot \bar{y} = \int y\,(dA)$ எனவுமாகும். இங்கு $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளி **பரப்பு மைய** மெனப்படும்

(ii) அது போலவே $V\bar{x} = \int x\,(dv)$

$$V\bar{y} = \int y\,(dv)$$

$s\,\bar{x} = \int x\,(ds)$; $s\,\bar{y} = \int y\,(ds)$ என்பனவற்றில் $(\bar{x}, \bar{y})$ முறையே பொருளின் பரும மையமென்றும், பொருளின் வில் மையமென்றும் கூறப்படும். இப்பரப்பு, பருமம், வில் மையங்களே அவற்றின் எடைகளுடன் (weights) தொடர்பு படுத்தினால் **புவிக்கவர்ச்சி மையங்களாகும்** (centroid). இவற்றை பு. க. மையம் எனச் சுருக்கிக் கூறலாம்.

குறிப்பு : (i) அடர்த்தி ஒரு மாறிலியானால், நிறை மையமும் (centre of mass) பு. க. மையமும் (centroid) ஒன்றே.

(ii) பொருளின் அடர்த்தி ρ, ஆயத் தொலைவுகளின் சார்பானால் $\rho\,(x, y)$ அதைத் தொகுபடு சார்புடன் இணைத்துத் தொகுத்து நிறை மையம் காணவேண்டும்.

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\rho\,(x,y)\,dA}{\int \rho\,(x,y)\,dA}\,;\quad \bar{y} = \frac{\int y\,\rho\,(x,y)\,dA}{\int \rho\,(x,y)\,dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\rho\,(x,y)\,dv}{\int \rho\,(x,y)\,dv}\,;\quad \bar{y} = \frac{\int y\cdot\rho\,(x,y)\,dv}{\int \rho\,(x,y)\,dv}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\rho\,(x,y)\,ds}{\int \rho\,(x,y)\,ds}\,;\quad \bar{y} = \frac{\int y\cdot\rho\,(x,y)\,ds}{\int \rho\,(x,y)\cdot ds}$$

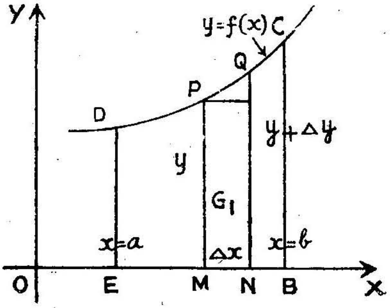
§ 42. வெளிப்படையான சில பு. க. மையங்கள்

(i) ஒரு நேர்கோட்டின் பு. க. மையம் அதன் நடுப்புள்ளி.

(ii) ஒரு சதுரம், நீள்சதுரம், இணைகரம் இவற்றின் பு.க. மையங்கள் அவற்றின் மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள்.

(iii) ஒரு முக்கோணத்தின் பு. க. மையம் அதன் நடுக் கோடுகளின் சந்திப்பு.

(iv) ஒரு வட்டம் அல்லது கோளத்தின் மையமும், பு. க. மையமும் ஒன்றே.



படம் 42

43. ஒரு சமதளப்பரப்பின் பு. க. மையம் காணல்

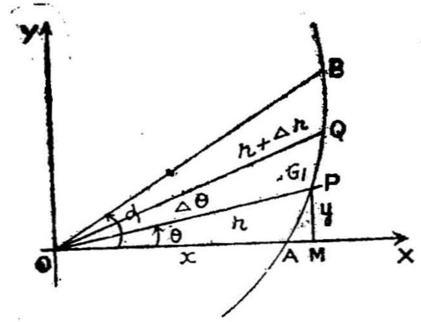
(*a*) **செங்குத்தாயங்கள் :** படத்தில் *EBCD* என்ற பரப்பு, வளைவரை $y = f(x)$-க்கும், x-அச்சுக்கும், $x = a$, $x = b$ என்ற குத்தாயங்களுக்கும் இடையிலுள்ளது. வளைவரையின் மேல் P, Q என்ற இரு புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகள் முறையே (x, y), $(x + \triangle x, y + \triangle y)$. PM, QN குத்தாயங்கள் Q என்ற புள்ளி P-யை நெருங்கும்போது $PMNQ$ என்ற உருவம் நுண்ணிய அகல முள்ள ஒரு நீள் சதுரமாகிறது. அதன் பரப்பு $\triangle A = y \cdot \triangle x$. அதன் பு. க. மையம் $\left(x + \dfrac{\triangle x}{2}, \dfrac{y}{2}\right)$ ஆயத் தொலைவுகளுள்ள G_1 என்ற புள்ளியாகும்.

EBCD-யின் பரப்பு A எனில்

$$A \cdot \bar{x} = \underset{\triangle x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_a^b (y \cdot \triangle x)\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) = \int_a^b x \cdot y \cdot dx$$

$$A \cdot \bar{y} = \underset{\triangle x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{a}^{b} (y \cdot \triangle x)\left(\frac{1}{2} y\right) = \int_{a}^{b} \frac{1}{2} y^2 \cdot dx$$

(b) **கோணதூரக் கூறுகள் (Polar Co-ordinates)**



படம் 43

AB என்ற வளைவரை $r = f(\theta)$ என்ற துருவ ஆயச் சமன்பாடு உள்ளதாகவும் x-அச்சு அடிப்படைக் கோடாகவும், $\angle AOB = \alpha$ எனவும் இருப்பின் OAB என்ற பரப்பின் பு. க. மையங்காண அதை OPQ போன்று நுண்பகுதிகளாக்க வேண்டும். OPQ-ன் பரப்பு $\triangle A$ எனில்

$$\triangle A = \tfrac{1}{2} r (r + \triangle r) \sin \triangle\theta$$

$$= \frac{1}{2} r (r + \triangle r) \frac{\sin \triangle\theta}{\triangle\theta} \cdot \triangle\theta$$

$= \frac{1}{2} r^2 \cdot \triangle\theta$, $\triangle\theta \to 0$ என்ற எல்லையில் புள்ளி Q, P-யை நெருங்கும்போது OPQ-ஐ அண்ணளவில் ஒரு முக்கோணமாகக் கொள்ளலாம். அதன் பு. க. மையம் G_1 $(\frac{2}{3} r, \theta)$ எனவாகும். G_1-ன் x, y அச்சு தூரங்கள் $(\frac{2}{3} r \cos\theta$, $\frac{2}{3} r \sin \theta)$ எனக்கொண்டு பரப்பு OAB-யின் பு. க. மையம் காணலாம்.

$$A \bar{x} = \int x dA = \int_0^{\alpha} \tfrac{1}{2} r^2 \times (\tfrac{2}{3} r \cdot \cos \theta)\, d\theta.$$

$$A \bar{y} = \int y dA = \int_0^{\alpha} \tfrac{1}{2} r^2 (\tfrac{2}{3} r \sin \theta)\, d\theta.$$

எ. கா. 1.

பரவளைவு $y^2 = 4ax$, x அச்சு, குத்தாயம் $x = b$ இவற்றினுள் அடங்கிய பரப்பின் பு. க. மையம் காண்க.

$$A\,\bar{x} = \int_0^b x\cdot y\cdot dx = \int_0^b x\cdot 2\sqrt{ax}\cdot dx$$

$$= 2\sqrt{a}\int_0^b x^{\frac{3}{2}}\cdot dx = 2\sqrt{a}\cdot\frac{2}{5}\,b^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}\,a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{5}{2}}$$

$$A\,\bar{y} = \int_0^b \frac{1}{2}\,y^2\,dx = \int_0^b 2ax\,dx = 2a\cdot\frac{b^2}{2} = ab^2.$$

$$i.e.\ A = \int_0^b y\cdot dx = \int_0^b 2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot dx = 2\sqrt{a}\,\frac{2}{3}\,b^{\frac{3}{2}}$$

$$= \tfrac{4}{3}\,a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\quad \bar{x} = \frac{\frac{4}{5}\,a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{5}{2}}}{\frac{4}{3}\,a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}\,b.$$

$$\therefore\quad \bar{y} = \frac{ab^2}{\frac{4}{3}\,a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}\sqrt{ab}.$$

$\therefore$ பு. க. மையம் $(\tfrac{3}{5}\,b, \tfrac{3}{4}\sqrt{ab})$

எ. கா. 2.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்ட நாற்கூறுப் பகுதியின் பு. க. மையம் காண்க.

$$A = \tfrac{1}{4}\,\pi ab$$

$$A\,\bar{x} = \int_0^a xy\cdot dx = \int xy\,\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta.$$

$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ என்று கொள்க.

$$A\,\bar{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot b\sin\theta\cdot a\sin\theta\cdot d\theta.$$

$$= a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot d\theta = a^2b\cdot\tfrac{1}{3}$$

$$A\,\bar{y} = \int_0^{a} \frac{y^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a} y^2\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta.$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2\sin^2\theta\cdot a\sin\theta\cdot d\theta.$$

$$= \frac{1}{2}\,ab^2\int \sin^3\theta\cdot d\theta = \frac{1}{2}\,ab^2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{ab^2}{3}$$

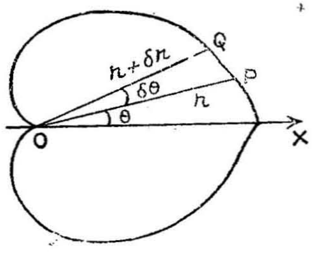
$$\therefore\quad \bar{x} = \left(\frac{a^2b}{3}\right)\left(\frac{\pi\,ab}{4}\right) = \frac{a^2b}{3}\times\frac{4}{\pi ab} = \frac{4a}{3\pi}\qquad \dots(1)$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{ab^2}{3}}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}\qquad \dots(2)$$

$$\therefore\quad \text{பு. க. மையம்}\ \left(\frac{4a}{3\pi}\right),\left(\frac{4b}{3\pi}\right)$$

எ. கா. 3.

$r = a\,(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையின் பரப்பின் பு. க. மையம் காண்க.



படம் 44

நெஞ்சு வளை தொடக்கக் கோட்டிற்கு மேலும் கீழும் சீராக இருப்பதால் அதன் பு. க. மையம் OX-ன் மேல் இருக்கும்.

நெஞ்சு வளையின்

பரப்பு $A = \Sigma\,(\triangle OPQ)$

$$= 2\sum_{0}^{\pi} \tfrac{1}{2} r^2 \cdot d\theta = 2 \times \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} a^2\,(1+\cos\theta)^2\,d\theta.$$

$$= a^2 \int_{0}^{\pi} 4\cos^4\frac{\theta}{2}\cdot d\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot 2$$

$$= 8a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\phi \cdot d\phi\,;\quad \phi = \frac{\theta}{2}\cdot$$

$$= 8a^2\,\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

$$A\,\bar{x} = 2\int_{0}^{\pi} \tfrac{1}{2} r^2 \cdot (\tfrac{2}{3} r\cos\theta)\cdot d\theta$$

$$= \tfrac{2}{3}\int_{0}^{\pi} a^3\,(1+\cos\theta)^3\cdot\cos\theta\cdot d\theta.$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{a}{3}\int_{0}^{\pi} a^3\,(\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\,d\theta.$$

$$= \tfrac{2}{3} a^3 \cdot 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2\theta + \cos^4\theta)\,d\theta.$$

[∵ $0 - \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, π இடைவெளிகளில் $\cos\theta^{2n+1}$ சமபரப்பு,

ஆனால் எதிர்க்குறிகள்]

$$= \frac{4}{3} a^3 \left[3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$\frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \pi a^3 \left(1 + \frac{1}{4} \right)$$

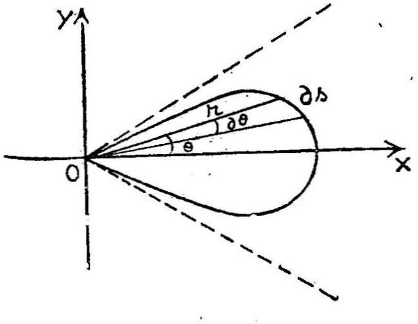
$$= \frac{5}{4} \pi a^3.$$

$$\therefore \; \bar{x} = \frac{\frac{5}{4} \pi a^3}{\frac{3}{2} \pi a^2} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} \cdot a = \frac{5}{6} a$$

எ. கா. 4.

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற லெமெனிஸ்கேட் (Lemniscate) வளை வரையின் ஒரு வளைவு பரப்பின் பு. க. மையம் காண்க.

$\pm r, \pm\theta$ மதிப்புகளை $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற சமன்பாட்டி லிட்டால் அதன் மதிப்பு மாறுவதில்லை. ஆதலால் இவ்வளைவரை அடிப்படைக் கோட்டையும் (x-அச்சு) ஆதியையும் ஒட்டிச் சீரான வடிவமுள்ளது.



படம் 45

$\theta = 0$ என்றிட, $r^2 = a^2$; $r = \pm a$ ... (i)

$\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ என்றிட, $r^2 = 0 \quad \therefore \quad r = 0$ ... (ii)

(i), (ii) அளவுகளுடன் வளைவரையின் படம் வரையலாம்.

பரப்பு x-அச்சையொட்டிச் சீரானதால் $\bar{y} = 0$

$$\Delta A = \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta. \quad \therefore A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta.$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta \cdot d\theta.$$

$$= a^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}$$

$$A \cdot \bar{x} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} x \, \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tfrac{2}{3} r \cos\theta) r^2 \, d\theta$$

$$= \tfrac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \cdot \cos\theta \cdot d\theta = \tfrac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^3 (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos\theta \, d\theta.$$

$$= \tfrac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \, d(\sin\theta)$$

$$= \tfrac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2u^2)^{\frac{3}{2}} \, du, \quad u = \sin\theta.$$

$$= \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\phi)^{\frac{3}{2}} \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}} \cdot d\phi.$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}u = \sin\phi \\ \sqrt{2} \cdot du = \cos\phi \, d\phi \end{cases}$$

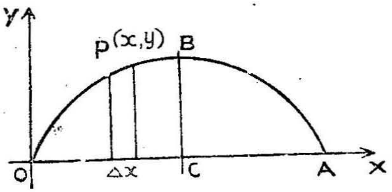
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\phi \cdot d\phi = \frac{a^3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi a^3}{8\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\pi a^3}{8\sqrt{2}} \times \frac{2}{a^2} = \frac{\pi a \sqrt{2}}{8}$$

எ. கா. 5.

$x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற உருள்வளை பரப்பின் பு. க. மையம் காண்க.



படம் 46

$$\Delta A = y \cdot dx$$

$$A = \int_0^{2\pi a} y \cdot dx$$

$$= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta) \, d\left[a(\theta - \sin\theta) \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} a\,(1 - \cos\theta) \cdot a\,(1 - \cos\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\, d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi} 4 \sin^4 \frac{\theta}{2} \cdot d\theta$$

$$= 2 \times 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \phi\, d\phi\,;\ \phi = \frac{\theta}{2}$$

$$= 16a^2 \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}\, \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2.$$

உருள்வளையில் $OA = 2\pi a$

C என்பது OA-யின் மையமானல் $OC = \pi a$

CB என்ற குத்தாயத்தை யொட்டி உருள்வளை சீராக அமைந்தது.

$$\therefore \quad \bar{x} = \pi \cdot a \tag{1}$$

$$A\,\bar{y} = \int_0^{2\pi a} \frac{y^2}{2}\, dx = \int_0^{2\pi} a^2\,(1 - \cos\theta)^2\, a\,(1 - \cos\theta)\, d\theta$$

$$= a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos\theta)^3 \cdot d\theta$$

$$= 8a \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{\theta}{2} \cdot d\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot 2$$

$$= 16a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\phi \cdot d\phi = 16a^3 \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

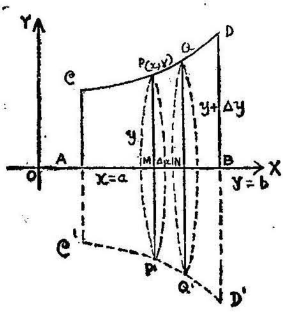
$$= \tfrac{5}{2} \pi a^3$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \pi a^3}{A} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\pi a^3}{3\pi a^2} = \frac{5}{6} a \qquad (2)$$

∴ பு. க. மையம் $(\pi a, \frac{5}{6} a)$

§ 44. உருளைப்பருமத்தின் பு. க. மையம்.

$y = f(x)$ என்ற வளைவரை, x-அச்சு, $x = a$, $y = b$ என்ற குத்தாயம் இவைகளால் அடைபடும் பரப்பு x-அச்சை ஒருமுறை சுற்றினால் ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தின் பு. க. மையம் காணல்.



படம் 47

PN போன்ற நுண்ணிய நீள் சதுரங்கள் x-அச்சைச் சுற்றும்போது அடி ஆரம் y-ம் Δx உயரமுமுள்ள நுண் உருளைகள். ஏற்படும் $\Delta V = \pi y^2 dx$. இதன் பு. க. மையம் x-அச்சில் $\left(x + \frac{\Delta x}{2}, 0\right)$ என்ற புள்ளியில் அமையும்.

$$\therefore \quad \bar{y} = 0, V \cdot \bar{x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{a}^{b} \pi y^2 \Delta x \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$= \int_a^b \pi x y^2 \cdot dx.$$

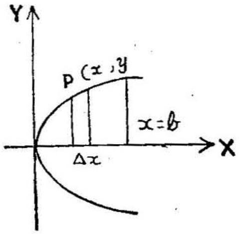
குறிப்பு : 1. $y = f(x)$, y-அச்சு, $y = c$, $y = d$ இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு y-அச்சை ஒருமுறை சுற்ற ஏற்படும் உருளையின் பு.க. மையம்

$$\bar{x} = 0, v \cdot \bar{y} = \int_c^d \pi y \cdot x^2 \cdot dy$$ எனவாகும்.

2. x, y அச்சுக்களல்லாது வேறெந்தக் கோட்டை யொட்டிச் சுழன்ருலும், அக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக ஏற்படும் நுண் உருளைப்பருமம் $\triangle v$ என்றும் அதன் பு.க. மையம் (x, y) என்றும் கொண்டு கணக்கிடல் வேண்டும்.

எ. கா. 1.

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவும், x-அச்சு $x = b$ குத்தாயம் இவற்ருலடைபட்ட பரப்பு x-அச்சையொட்டி ஒருமுறை சுற்றினுல் ஏற்படும் உருளை பருமத்தின் பு.க. மையம் காண்க.



படம் 48-a

உருளைப்பருமம் x-அச்சையொட்டி சீராக உள்ளதால் $\bar{y} = 0$

$$V = \int_0^b \pi y^2 \cdot dx$$

$$= \pi \int_0^b y^2 \cdot dx = \pi \int_0^b 4ax \cdot dx$$

$$= 4a\pi \cdot \frac{b^2}{2} = 2\pi a \cdot b^2.$$

$$V \cdot \bar{x} = \int_0^b x \cdot \pi y^2\, dx = \pi \int_0^b x \cdot 4ax \cdot dx$$

$$= 4a\pi \int x^2 \cdot dx = \frac{4\pi}{3} ab^3$$

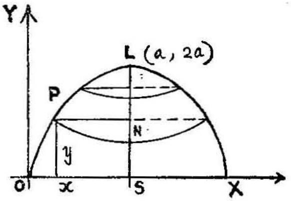
$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\frac{4}{3}\pi ab^3}{2\pi ab^2} = \frac{2}{3} b$$

$\therefore$ பு.க. மையம் $= (\frac{2}{3} b, 0)$

எ. கா. 2

பரவளைவு $y^2 = 4ax$, அதன் அச்சு செவ்வகலம் (latus rectum) இவற்ருலடைபடும் பரப்பு செவ்வகலத்தை ஒட்டி ஒரு முறை சுற்றினுல் ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தின் பு.க. மையம் காண்க.

அச்சு SL-ஐ ஒட்டி உருளைப்பருமம் சீராக உள்ளது. ஆதலால் பு.க. மையம் SL-ன் மேலிருக்கும்.



படம் 48-b

$\bar{x} = a$

$$V = \int_0^{2a} \pi \cdot PN^2 \cdot dy = \int_0^{2a} \pi\,(a - x)^2 \cdot dy$$

$$= \pi \int_0^{2a} \left(a - \frac{y^2}{4a} \right)^2 \cdot dy$$

$$= \pi \int_0^{2a} \left(a^2 - 2a \cdot \frac{y^2}{4a} + \frac{y^4}{16a^2} \right) dy$$

$$= \pi \left[a^2 y - \frac{y^3}{3 \cdot 2} + \frac{y^5}{5 \cdot 16a^2} \right]_0^{2a}$$

$$= \pi \left[a^2 \cdot 2a - \frac{8a^3}{6} + \frac{32 \cdot a^5}{80 \cdot a^2} \right]$$

$$= \pi a^3 \left[2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right] = \frac{\pi a^3}{15} (30 - 20 + 6) = \frac{16}{15} \pi a^3$$

$$V \cdot \bar{y} = \int_0^{2a} \pi \cdot PN^2 \cdot y \cdot dy = \pi \int_0^{2a} (a - x)^2 \cdot y \cdot dy$$

$$= \pi \int_0^{2a} \left(a - \frac{y^2}{4a} \right)^2 \cdot y \, dy$$

$$= \pi \int_0^{2a} \left(a^2 - 2a \cdot \frac{y^2}{4a} + \frac{y^4}{16a^2} \right) y \, dy$$

$$= \pi \int_0^{2a} \left(a^2 y - \cdot \frac{y^3}{2} + \frac{y^5}{16a^2} \right) dy$$

$$= \pi \left[a^2 \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^4}{4} + \frac{1}{16a^2} \cdot \frac{y^6}{6} \right]_0^{2a}$$

$$= \pi \left[a^2 \cdot \frac{4a^2}{2} - \frac{1}{8} \cdot 16a^4 + \frac{1}{96a^2} 64a^6 \right]$$

$$\therefore \quad V \cdot \bar{y} = \tfrac{2}{3} \pi a^4, \qquad V = \tfrac{16}{15} \pi a^3$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{\frac{2}{3} \pi a^4}{\frac{16}{15} \pi a^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} \cdot a = \frac{5}{8} a$$

§ 45. வட்டம், கோளம்-இவற்றையொட்டிய கணக்குகள்.

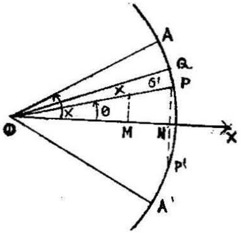
(i) r ஆரையுள்ள ஒருவட்ட வில்லின் பு.க. மையம் காணல்.

வில் $A'A$-ஐ, OX இருசமபாகங்களாக வெட்டட்டும். முழுவில் வட்டமையத்தில் 2α கோணம் உண்டாக்கினல் (Subtends)

$\angle XOA = \alpha$, $\angle XOP = \theta$ என்க.

முழு வில் $A'A = r \cdot 2\alpha$.

$= s$.



படம் 49

$$s\bar{x} = \Sigma (x \cdot \triangle s) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} x \cdot r \cdot d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\alpha} r \cdot \cos\theta \cdot r \cdot d\theta = 2r^2 \int_0^{\alpha} \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= 2r^2 \cdot \sin\alpha$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{2r^2 \sin\alpha}{s} = \frac{2r^2 \sin\alpha}{2r \cdot \alpha} = \frac{r \sin\alpha}{\alpha}$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ எனில் $\bar{x} = \left[\frac{2r}{\pi}\right]$

$A'A$-வில் OX-ஐ ஒட்டிச் சீராக இருப்பதால் $\bar{y} = 0$.

(ii) r-ஆரையுள்ள ஒருவட்டக் கோணப்பகுதியின் பு.க. மையம் காணல்.

வட்டக்கோணப்பகுதி, OPQ போன்ற நுண் (படம் 49) பகுதிகளின் கூடுதலாகக் கொள்வோம்.

$\triangle A = \frac{1}{2} r^2 d\theta$; $A = \frac{1}{2} r^2 . 2\alpha = r^2\alpha$

$\triangle\theta \to 0$ எல்லையில் பரப்பு OPQ = முக்கோணம் OPQ.

$\triangle OPQ$-யின் பு.க. மையதூரம் $OG_1 = \frac{2}{3} r$

$$x = OM = OG_1 \cos\theta = \frac{2}{3} r \cos\theta$$

$$A\bar{x} = 2\int_0^{\alpha} \tfrac{1}{2} r^2 \left(\tfrac{2}{3} r \cos\theta\right) d\theta$$

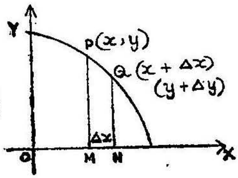
$$= \tfrac{2}{3} r^3 \int_0^{\alpha} \cos\theta \cdot d\theta = \tfrac{2}{3} r^3 \cdot \sin\alpha$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\tfrac{2}{3} r^3 \sin\alpha}{r^2\alpha} = \left(\frac{\tfrac{2}{3} r \sin\alpha}{\alpha}\right)$$

$A'A$-வில் OX-ஐ ஒட்டிச்சீராக இருப்பதால் வட்டக்கோணப் பகுதியின் $\bar{y} = 0$

குறிப்பு : $\alpha = \frac{\pi}{2}$ எனில் $\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$

(iii) **அரைக்கோளத்தின் பு.க. மையம் காணல்.**



படம் 50

கால்வட்டம் x-அச்சையொட்டிச் சுற்றுவதால் அரைக்கோளம் ஏற்படுகிறது. அவ்வாறு சுற்றும்போது நுண் பகுதியான PN என்ற நீள்சதுரம் அடிஆரம் y, உயரம் Δx உள்ள நுண் உருளையாகிறது.

$$\Delta v = \pi y^2 \Delta x$$

நுண் உருளையின் பு.க. மையம் x-அச்சின் மேல் O-விலிருந்து x-தூரத்திலிருக்கும். வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$.

$$V = \tfrac{2}{3}\pi a^3$$

$$V \cdot \bar{x} = \int_0^a \pi y^2 \cdot x \cdot dx = \pi \int_0^a x(a^2 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \int_0^a (a^2 x - x^3)\, dx = \pi\left[\left(a^2 \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi a^4}{4}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\pi a^4}{4 \cdot V} = \frac{\pi a^4}{4} \times \frac{3}{2\pi a^3} = \frac{3}{8} a$$

$\bar{y} = 0 \quad \therefore$ பு.க. மையம் $\left(\tfrac{3}{8} a, 0\right)$

(iv) உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் பு. க. மையம் காணல்.

வில் $PQ = ds.$

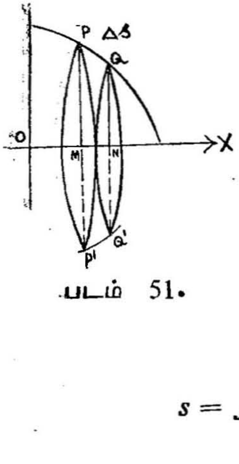
$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\ a).$$

வட்டம், $x = a \cos \theta$

$y = a \sin \theta$ எனில்

$$ds = \sqrt{(-a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2}.\ d\theta.$$

$$= a\, d\theta$$



படம் 51.

கால் வட்டவில் x-அச்சையொட்டிச் சுழலும்போது Δs ஒரு கூம்பு வெட்டுத் துண்டின் புறப்பரப்பைத் தோற்றுவிக்கும்.

அதன் அடிப்பக்க ஆரம் y,

சாய்வு உயரம் $\triangle s$.

கூம்பு வெட்டுத்துண்டின் புறப்பரப்பு

$$\Delta s = 2\pi y \cdot \Delta s$$

$$s = \int 2\pi y \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \cdot a \sin \theta \cdot a\, d\theta.$$

$$= 2\pi a^2 (\cos \theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi\, a^2$$

$$s\, \bar{x} = \int_0^{} x\, 2\, \pi y \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\, (a \sin \theta)\, (a \cos \theta)$$

$$\times\ a d\theta$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta = 2\pi\, a^3 \cdot \frac{1}{2}$$

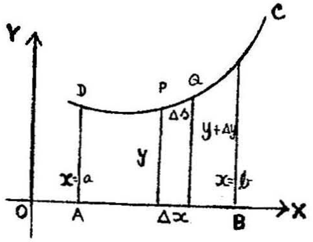
$$= \pi a^3$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\pi a^3}{s} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}$$

பு. க. மையம் $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

§ 46. ஒரு வில்லின் பு. க. மையங்காணல்.

DC என்பது $y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் வில். (x, y) புள்ளியில் வில் $PQ = \triangle s$ ஒரு நுண் பகுதி.



படம் 52.

$Q \rightarrow P$ எனும் போது

$\triangle s = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$ (முதல்படி நுண்ணளவுக்கு)

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

செங்குத்தாயத் தொலைவுகளில்

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta$$

சாரா மாறித் தொலைவுகளில்

$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$ துருவ ஆய

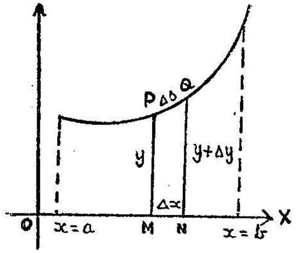
அளவுகளில் இவ்வாய்பாடுகளை முன்பே கண்டோம்.

∴ வளைவரை DC-யின் பு. க. மையம்

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \cdot ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx}{\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y \cdot ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx}{\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx}$$

§ 47. உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பின் பு.க. மையம் காணல்.



படம் 53

AB என்ற வளைவரை x-அச்சை யொட்டிச் சுழலும்போது தோன்றும் உருளைப் பருமத்தின் புறப்பரப் y-ஆரமாகவும் Δs சாய்வு உயரமாக வும் கொண்ட நுண்கூம்புத் துண் டங்களின் புறப்பரப்பின் தொகை யாகும்.

$$S = \Sigma\, 2\pi y \cdot \Delta s$$

$$= \sum_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

உருளை x-அச்சுக்குச் சீராக இருப்பதால் $\bar{y} = 0$

$$S \cdot \bar{x} = \int_a^b x \cdot 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$$= \int_a^b 2\pi xy \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$$

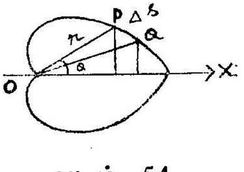
$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b 2\pi\, xy \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx}{\displaystyle\int_a^b 2\pi\, y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx}$$

குறிப்பு : துருவ ஆய அளவுகளில்

$$\Delta s = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$$

எ.கா 1.

நெஞ்சுவளை $r = a(1+\cos\theta)$, அடிப்படைக் கோட்டையொட்டிச் சுழலும்போது உண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பின் பு.க. மையம் காண்க.



படம் 54

வரைவளையின் சமச்சீருக்கு ஏற்ப $\bar{y} = 0$

$$ds = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot ds$$

$$= \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}\cdot d\theta$$

$$= a\sqrt{2+2\cos\theta}\cdot d\theta = \sqrt{2}a \times \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot d\theta$$

$$= 2a\cos\frac{\theta}{2}\cdot d\theta$$

$$S = \int_0^\pi 2\pi y\cdot ds = \int_0^\pi 2\pi\, r\sin\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 2\pi\, a\,(1+\cos\theta)\cdot \sin\theta \cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\theta}{2}\, 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot d\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot 2$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot d\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot 2$$

$$= 32\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\phi\,\sin\phi\, d\phi\;;\quad \phi = \frac{\theta}{2}$$

$$= 32\pi a^2\,\frac{3\cdot 1}{5\cdot 3}\,1 = \frac{32}{5}\pi a^2$$

$$S\,\bar{x} = \int_0^{\pi} x\cdot 2\pi y\cdot ds = \int_0^{\pi} r\cos\theta\cdot 2\pi\, r\sin\theta\; 2a\cdot\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 4\pi a\cdot a^2(1+\cos\theta)^2\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot \cos\frac{\theta}{2}\times d\left(\frac{\theta}{2}\right)2$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{\pi} 4\cos^4\frac{\theta}{2}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot d\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 64\pi a^3 \int_0^{\pi} \cos^6 \frac{\theta}{2} \left(2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot d\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 64\pi a^3 \int_0^{\pi} [2 \sin \phi \cdot \cos^8 \phi - \sin \phi \cdot \cos^6 \phi]\, d\phi$$

$$\left(\phi = \frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 64\pi a^3 \left[\frac{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \cdot 1 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{7 \cdot 5 \cdot 3} \cdot 1\right]$$

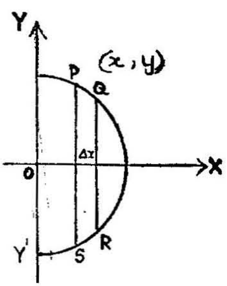
$$= 64\pi a^3 \left[\frac{14 - 9}{9 \cdot 7}\right] = 64\pi a^3 \cdot \frac{5}{9 \cdot 7} = \frac{320\pi a^3}{63}$$

$$\bar{x} = \frac{320\pi a^3}{63} \times \frac{5}{32\pi a^2} = \frac{50}{63} a$$

§ 48. அடர்த்தி ρ ஒரு மாறியாக இருக்கும்போது பு. க. மையம் காணல்.

எடுத்துக்காட்டு.

1. ஓர் அரைவட்டப் பரப்பின் அடர்த்தி ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், விட்டத்திலிருந்து அதன் தூரத்திற்கு நேர்விகிதத்திலுள்ளதெனில் அதன் பு. க மையம் காண்க.



படம் 55

PSRQ என்ற நுண் பரப்பின் பு. க. மையம் *Y'Y* விட்டத்திலிருந்து x தூரத்திலுள்ளது.

$$\Delta A = 2y \cdot \Delta x.$$

$$\Delta m = 2y \cdot \Delta x\, \rho$$

இங்கு $\rho = Kx$, K ஒரு மாறிலி.

$$\therefore \quad \Delta m = (2y \cdot \Delta x)(K \cdot x)$$

அரைவட்டம் x-அச்சுக்குச் சமச்சீர் $\therefore \quad \bar{y} = 0$

$$\bar{x} \Sigma \triangle m = \Sigma x \cdot \triangle m$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x \cdot \triangle m}{\Sigma \triangle m} = \frac{\int_0^a x \cdot 2y\,(K \cdot x)\, dx}{\int_0^a 2y\,(K \cdot x)\, dx}$$

$$= \frac{\int_0^a x^2 y \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta}{\int_0^a x\, y \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta}$$

(வட்டச்சமன்பாடுகள்) $[x = a \cos \theta \;\; y = a \sin \theta]$

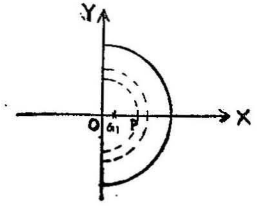
$$= \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \cos^2\theta \cdot a \sin \theta\, (- a \sin \theta)\, d\theta.}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a \cos \theta \cdot a \sin \theta\, (- a \sin \theta)\, d\theta.}$$

$$= \frac{a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^2\theta \cdot d\theta}{a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^2 \theta \cdot d\theta} = \frac{a \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{3} \cdot 1}$$

$$= \frac{3}{16} \pi a$$

$$\therefore \quad OG = \frac{3}{16} \pi a$$

எ. கா. 2.



படம் 56

ஓர் அரைக்கோளத்தின் அடர்த்தி மையப்புள்ளியிலிருந்து புள்ளிகளின் தூரங்களின் n மடங்குக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது. பு. க. மையங்காண்க.

அரைக்கோளத்தை x ஆரமும், $\triangle x$ தடிப்புமுள்ள உள்ளீடற்ற அரைக்கோளங்களாக்கினுல் ஒவ்வொன்றின் பருமமும், ஒரு படி நுண்ணளவுக்கு (to the first order of infinitesimal) $\triangle V = 2\pi x^2 \cdot \triangle x$

அதன் பு. க. மையம் $OG_1 = \dfrac{x}{2}$

$\rho = K \cdot x^n$, K ஒரு மாறிலி.

$\therefore \quad \triangle m = (2\pi\, x^2 \cdot \triangle x)\rho = (2\pi\, x^2 \cdot \triangle x)\, K \cdot x^n.$

$$\bar{x} = \frac{\sum \frac{x}{2}\, dm}{\Sigma\, dm} = \frac{\sum_0^a \frac{x}{2}\,(2\pi\, x^2 \cdot \triangle x)\,(K\, x^n)}{\Sigma_0^a\,(2\pi\, x^2 \cdot \triangle x)\,(K \cdot x^n)}$$

$$\frac{2\pi \int^a \frac{x^{n+3}}{2} \cdot dx}{2\pi \int_0^a x^{n+2} \cdot dx} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{a^{n+4}}{n+4}}{\frac{a^{n+3}}{n+3}}$$

$$= \frac{n+3}{n+4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{n+3}{n+4}$$

அரைக்கோளம் x-அச்சுக்குச் சமச்சீர் $\therefore\ \bar{y} = 0$

பயிற்சிகள் 38

1. கீழ்க்காணும் **வில்களின் பு.** க. மையங்களைக் காண்க :

1. $x = a\,(\theta - \sin\theta)$, $y = a\ (1 - \cos\theta)$ என்ற உருள் வளையின் ஒரு வளைவு.

2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற வளைவரையின் அடுத்துள்ள இரு முனைகளுக்கு இடையிலுள்ள வளைவு.

3. நெஞ்சுவளை $r = a\,(1 + \cos\theta)$.

4. வளைவரை $4y^2 = x^3$-ல் $y = -\frac{1}{2}$ முதல் $y = \frac{1}{2}$ வரையிலுள்ள வில்.

2. கீழ்க்காணும் **பரப்புகளின் பு.** க. மையங்கள் காண்க.

1. நெஞ்சுவளை $r = a\,(1 + \cos\theta)$

2. $r = a\cos 2\theta$ என்ற வளைவரையின் வளைவு.

3. $r = a\ \cos 3\theta$ என்ற வளைவரையின் வளைவு.

3. கொடுக்கப்பட்ட எல்லைகளுக்குட்பட்ட பரப்புகளின் பு. க. மையங்கள் காண்க.

1. $y^2 = 4ax$, இரட்டைக் குத்தாயம் $x = h$.

2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, இரு அச்சுகள்.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தை $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற கோடு வெட்டும்போது ஏற்படும் சிறிய பகுதி.

4. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

5. வளைவரை $y = \sin x$, x-அச்சு.

6. x-அச்சு, கயிற்றுவளை $y = c\cosh\frac{x}{c}$, குத்தாயங்கள் $x = \pm b$.

7. $y^2 = 4ax$, x-அச்சு, செவ்வகலம் (latus rectum).

8. $xy = a^2$, x-அச்சு, $x = b$, $x = c$.

9. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற உருள் வளையின் ஒரு வளைவு, x-அச்சு.

10. $x^2 = 4y$, $y = x$.

11. $y^2 = 4x$, $x - 2y + 3 = 0$.

12. $y = 4x^2$, $y = x^4$ முதல் நாற்கூறுப் பகுதியில் (I Quadrant).

4. நீள்வட்டத்தின் நாற்கூறுப் பகுதி (Quadrant)-யின் பு. க. மையம் காண்க.

5. r ஆரையும் மையக்கோணம் 2α-ம் உள்ள வட்ட வில்லின் முனைகளைச் சேர்க்கும் நாணிற்கும், வில்லிற்கும் இடைப்பட்ட பகுதி (segment)-ன் பு. க. மையம் காண்க.

6. r ஆரையுள்ள ஓர் அரைவட்டத்தின் அடர்த்தி எல்லை விட்டத்திலிருந்து உள்ள தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருந்தால் அதன் பு. க. மையங் காண்க.

7. ஒருவட்டத்தின் ஆரை a, ஒரு புள்ளியில் அதன் அடர்த்தி மையத்திலிருந்து புள்ளியின் தூரத்தில் K மடங்கெனில் வட்டத்தின் நிறைமையங் காணவும்.

8. a ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தை அதன் மையத்திலிருந்து b, c தூரங்களில் இரு இணையான தளங்கள் வெட்டும்போது ஏற்படும் இடைப்பகுதியின் பு. க. மையங் காண்க.

9. ஓர் அரைக்கோளத்தின் அடர்த்தி ஏதேனுமொரு புள்ளியில் அதன் சமதளப் பீடத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரத்தின் இருபடி (Square)-யானால் அரைக்கோளத்தின் நிறை மையம் காண்க.

10. கீழ்க்காணும் பரப்புகள் சுற்றும் போதுண்டாகும் உருளைப் பருமங்களின் பு. க. மையம் காண்க.

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டம் $x = 0$, $x = a$ x-அச்சு இவற்றிற்கு இடையிலுள்ள பகுதி OX-ஐ யொட்டி.

2. $y = a\sin x$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ இவற்றிற்கிடையிலுள்ளது x-அச்சையொட்டி.

3. $xy = a^2$, $y = a$, $y = 2a$ இவற்றிலடைபட்டது OY-ஐ யொட்டி.

11. ஒரு நேர் வட்டக்கூம்பின் பு. க. மையம் காணவும்.

12. $ay^2 = x^2 (a - x)$ என்ற வளைவரையின் வளையத்தின் பரப்பு x-அச்சையொட்டிச் சுற்றும் போதுண்டாகும் உருளைப் பருமத்தின் பு. க. மையங் காண்க.

13. ஒரு கால் வட்டம், அதன் இரு முனைகளில் வரைந்த தொடு கோடுகள் இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு, ஒரு தொடு கோட்டைச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப்பருமத்தின் பு. க. மையம் காணவும்.

14. $y^2 = 4ax$, x-அச்சு, செவ்வகலம் (latus rectum) இவற்றிற் கிடைப்பட்ட பரப்பு, செவ்வகலத்தை யொட்டிச் சுற்ற வுண்டாகும் உருளைப் பருமத்தின் பு. க. மையத்தைக் காண்க.

15. a ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தில் h உயரமுள்ள துண்டின் (spherical cap) பு. க. மையம் காணவும்.

16. $r = a (1 + \cos\theta)$ என்ற வளைவரை அதன் அச்சை யொட்டிச் சுற்றும் போதுண்டாகும் உருளைப் பருமத்தின் பு. க. மையம் காண்க.

17. $9 y^2 = x^2 (3 - x)^2$ என்ற வளைவரையின் வளையம் x-அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போதுண்டாகும் உருளைப் பருமப் புறப்பரப்பின் பு. க. மையம் காணவும்.

18. $y^2 = 4x$, $x = 0$, $x = 3$ இவற்றிற் கிடைப்பட்ட பகுதி x-அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப் பருமத்தின் புறப்பரப்பின் பு. க. மையம் காண்க.

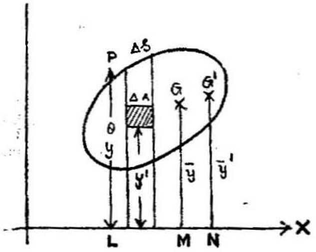
19. a ஆரையுள்ள ஒரு கால்வட்டம் அதன் ஒரு முனையில் வரைந்த தொடு கோட்டையொட்டிச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப் பருமத்தின் புறப்பரப்பின் பு. க. மையத்தைக் காண்க.

20. ஒரு கூம்பின் வெட்டுத்துண்டத்தின் இரு எல்லை வட்டங் களின் ஆரைகள் a, b; துண்டத்தின் நீளம் h என்ருல் அதன் பு. க. மையத்தைக் காணவும்.

§ 49. பாப்பசு தேற்றங்கள் (Pappus' Theorems)

1. **ஒரு வளைவரை அதன் தளத்திலுள்ள ஓர் அச்சையொட்டி ஒருமுறை சுற்றுவதாலுண்டாகும் புறப்பரப்பளவு அவ்வளைவரையின் நீளத்தையும் அதன் பு க. மையம் சுற்றிய தூரத்தையும் பெருக்கி வந்த தொகைக்குச் சமம்.**

2. **ஒரு பரப்பு அதன் தளத்திலுள்ள ஓர் அச்சையொட்டி ஒரு முறை சுற்றுவதால் உண்டாகும் பருமம், அப்பரப்பையும் அதன் பு.க. மையம் சுற்றிய தூரத்தையும் பெருக்கிவந்த தொகைக்குச் சமம்.**



படம் 57

குறிப்பு : அச்சைச் சுற்றும் முழுவில்லும் அச்சுக்கோட்டிற்கு ஒரு புறமாகவுள்ளது எனக் கொள்க.

வளைவரை x-அச்சைச் சுற்றுவதாகக் கொள்வோம்.

தேற்றம் 1-ன் தெரிப்பு :

முழுவரையின் நீளம் s எனவும் அதன் பு. க. மையக்குத்தாயம் $\bar{y}$ எனவும் இருப்பின் $s\bar{y} = \int y\,ds$ (தகுந்த எல்லைக்குள்) என்றறிவோம். வளைவரை சுற்றுவதால்

ஏற்படும் புறப்பரப்பு $\left[\begin{array}{ll} \llcorner P = y & MG = \bar{y} \\ \llcorner Q = y^1 & NG^1 = \bar{y}^1 \end{array}\right]$

$$= \int 2\pi\, y \cdot ds = 2\pi \int y \cdot ds$$

$$= 2\pi\, s \cdot \bar{y} = s\,(2\pi\,\bar{y})$$

= வளைவரையின் நீளம் X வளைவரையின் பு. க. மையம் சுற்றிய தூரம்.

தேற்றம் 2-ன் தெரிப்பு :

பரப்பு A எனவும் அதன் பு.க. மையக் குத்தாயம் $\bar{y}$ எனவுமிருப்பின் $A\bar{y}' = \int y'dA$ என்றறிவோம். பரப்பு சுற்றுவதால் ஏற்படும் பருமம்

$$= \int 2\pi y' \cdot dA$$

$$= 2\pi \int y'dA = 2\pi A \cdot \bar{y}' = A\,(2\pi\bar{y}')$$

= பரப்பு × பரப்பின் பு.க. மையம் சுற்றிய தூரம்.

குறிப்பு : மேற்கண்டவற்றில் வளைவரை அல்லது பரப்பு 2π கோணம்முழுவதும் (ஒருமுழுச்சுற்று) சுற்றுமல் α கோணம்மட்டும் சுற்றினுல், 2π வருமிடத்து α வருமென்பது தெளிவு.

§ 50. பாப்பசு தேற்றங்களின் பயன்கள் .

1. அரைவட்ட வளைவரையின் பு.க. மையம் காணலாம்.

அரைவட்ட வளைவரையின் நீளம் $= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$ விட்டத்தை அச்சாகக் கொண்டு அரைவட்டத்தைச் சுற்றினுல் கோளம் ஏற்படும்.

கோளத்தின் புறப்பரப்பு $= 4\pi r^2$ பாப்பசு தேற்றத்தின்படி, $\bar{y}$-வில்லின் பு.க. மையக்குத்தாயமானுல்

$$2\pi \bar{y} \times (\pi r) = 4\pi r^2$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{4\pi r^2}{2\pi \times \pi r} = \frac{2r}{\pi}$$

2. அரைவட்டப்பரப்பின் பு.க. மையங்காணலாம். அரைவட்டப்பரப்பு $= \frac{1}{2} \pi r^2$.

விட்டத்தை அச்சாகக்கொண்டு அரைவட்டத்தைச் சுற்றினுல் கோளம் ஏற்படும். கோளத்தின் பருமம் $= \frac{4}{3} \pi r^3$. பாப்பசு தேற்றத்தின்படி, $\bar{y}$ அரைவட்டப்பரப்பின் பு.க. மையத்தின் குத்தாயமானுல்,

$$2\pi \bar{y} \left(\tfrac{1}{2} \pi r^2\right) = \tfrac{4}{3} \pi r^3$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{2\pi \cdot \frac{1}{2} \pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$

3. r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் அதன் மையத்திலிருந்து C தூரத்திலுள்ள அச்சைச் சுற்றும்போது ஏற்படும் வளையத்தின் பருமனையும், புறப்பரப்பையுங் காணலாம்.

பாப்பசு தேற்றத்தின்படி

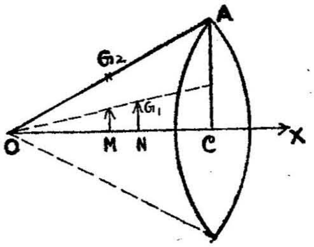
$$\text{பருமம்} = 2\pi \bar{y} \times \text{வட்டப்பரப்பு}$$

$$= 2\pi C + \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 C$$

$$\text{புறப்பரப்பு} = 2\pi \bar{y} \cdot (\text{வட்டச்சுற்றளவு})$$

$$= 2\pi C \times 2\pi r = 4\pi^2 r C$$

4. ஒருநேர் வட்டக்கூம்பின் பருமம், புறப்பரப்பு இவற்றைக் காணலாம்.



படம் 58

கூம்பின் அடிஆரம் r என்றும் உயரம் h என்றும் கொள்க. OC-ஐ அச்சாகக்கொண்டு OA என்ற நேர்கோடு சுழல்வதால் கூம்பு ஏற்படுகிறது.

$\triangle OCA$-யின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\, rh$

$\triangle OCA$-யின் பு.க. மையக்குத்தாய தூரம், $\bar{y} = NG \; \frac{r}{3}$

$\therefore$ கூம்பின் பருமம் $= 2\pi \; \frac{r}{3} \times \left(\frac{1}{2}\, rh \right)$,

$\triangle OCA = \frac{1}{2}\, rh$

$= \frac{1}{3}\, \pi r^2 h$

கூம்பின் அல்லது OA தோற்றுவிக்கும்

புறப்பரப்பு $= OA$-யின் நீளம் $\times$ அதன் பு.க. மையம் செல்லுந்தூரம்

$= \sqrt{r^2 + h^2} \times 2\pi\, MG_2 - G_2$, OA-யின் பு.க. மையம்

$= l \times 2\pi \times \frac{r}{2}$

$= \pi r l$ இங்கு l-சாய்வுயரம் $MG_{.} = \frac{r}{2}$

பயிற்சிகள் 39

1. ஒரு சமபக்க முக்கோணம் அதன்பக்கத்தை யொட்டிச் சுற்றவுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தின் புறப்பரப்பையும், பருமத்தை யுங்காண்க.

2. பாப்பசு தேற்றங்களைக் கொண்டு (a) ஒரு நேர்வட்ட உருளை (b) ஒரு நேர்வட்டக்கூம்பு, இவற்றின் பருமத்தையும் புறப்பரப்பையும் கணக்கிடுக.

3. ஒருவட்டம் அதன் ஒருதொடு கோட்டை யொட்டிச் சுற்ற ஏற்படும் உருளைப்பருமம், அதன் புறப்பரப்பு இவற்றை மதிப்பிடுக.

4. ஒரு நீள் வட்டம் அதன் ஓர் இயக்குவரை (directrix)-யை யொட்டிச் சுழலும்போதுண்டாகும் உருளைப்பருமத்தைக் கணக்கிடுக.

13. நிலை நெம்புத்திறன் (Moment of Inertia)

§ 50. வரையறை

m நிறையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து r தூரத்திலிருந்தால் அக்கோட்டையொட்டி அப்பொருளின் நிலை நெம்புத் திறன் (நி. நெ. தி,) mr^2 எனப்படும். அதுபோல $m_1, m_2, m_3,$ ...... நிறைகளும் கோட்டிலிருந்து முறையே r_1, r_2, r_3 ...... தூரங்களுமுள்ள ஒரு நிறைகளின் கூட்டத்தின் நி.நெ. தி. $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots \equiv \Sigma (mr^2)$ ஆகும்.

பொருள்கள் தனித்திராமல் தொடர்ந்து ஒரே பொருளாக இருக்குமானால் நி. நெ. திறனின் கூடுதலானது ஒரு வரையறுத்த தொகை (definite Integral) ஆகும்.

ஒரு நுண்பகுதியின் நிறை $\triangle m$ எனவும் ஒரே நேர்கோட்டிலிருந்து அதன் தூரம் r எனவுமிருப்பின் அக்கோட்டையொட்டி முழுப்பொருளின் நி. நெ. தி, $\Sigma r^2 \triangle m$ அல்லது $\int r^2 dm$ ஆகும். பொருளின் கூட்டு நிறை M எனவும், $MK^2 = \int r^2 dm$ எனவும் கொண்டால், K என்பது அக்கோட்டையொட்டிப் பொருளின் சுழிப்பு ஆரம் அல்லது சுழியாரை (radius of gyration) எனப்படும்.

கோட்டிலிருந்து K தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் M-ன் நிறை முழுவதும் தேங்கியிருப்பின் இதே அளவுள்ள நி. நெ. தி. வருமென்பதாகும்.

குறிப்பு : மேலே கண்டவற்றில் பொருளின் அடர்த்தி எங்கும் சமமெனக் கொண்டுள்ளது. அடர்த்தி ஒரு மாறி $P = K(x, y)$ எனில் அதைத் தொகு சார்புடன் இணைத்துத் தொகுக்க வேண்டும்.

எ. கா 1.

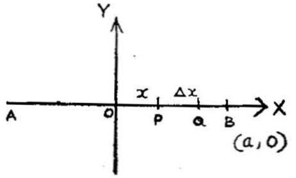
$2a$ நீளமுள்ள நேரான, சமகுறுக்கு வெட்டுள்ள, சீரான அடர்த்தியுள்ள ஒரு கோலின் நி. நெ. திறனை அதன் மையக் குத்துக் கோட்டையொட்டிக் காண்க.

கோலை x-அச்சாகவும் அதன் மையம் O-வை ஆதியாகவும் கொள்க.

$OP = x$

ஒரு நுண்பகுதி $PQ = \triangle x$

$\triangle m = \triangle x \cdot \rho$, ρ-அடர்த்தி ஒரு மாறிலி.



படம் 59.

OY-ஐயொட்டி $\triangle m$-ன் நி. நெ. தி. $= \triangle m \cdot x^2$

$$= \triangle x \cdot \rho \cdot x^2$$

$\therefore$ AB யின் நி. நெ. தி. $= \sum_{-a}^{+a} \triangle x \cdot \rho \cdot x^2$

$$= \int_{-a}^{+a} \rho\, x^2 \cdot dx = 2\rho \int_0^a x^2 \cdot dx$$

$$= \frac{2\rho}{3} \cdot a^3.$$

$$= (2 \cdot a \cdot \rho). \frac{a^2}{3} = M. \frac{a^2}{3}$$

$$= MK^2 \ldots\ldots \text{(i)}$$

$K = \frac{a}{\sqrt{3}}$ சுழியாரை

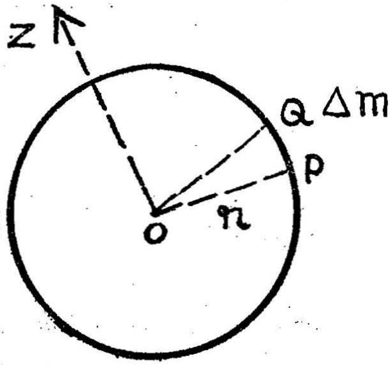
எ. கா. 2.

r-ஆரையுள்ள ஒரு வட்டமான மெல்லிய கம்பியின் மையத்தின் வழியே வட்டத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான கோட்டை யொட்டிக் கம்பியின் நி. நெ. தி. காண்க.

OZ-தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சு

$PQ = \triangle m$, நுண் பகுதியின் நிறை

r = அச்சிலிருந்து $\triangle m$-ன் தூரம் என்ருல் வட்டக்கம்பியின் நி. நெ. தி. = $\Sigma \triangle m \cdot r^2$, r ஒரு மாறிலி.



படம் 60.

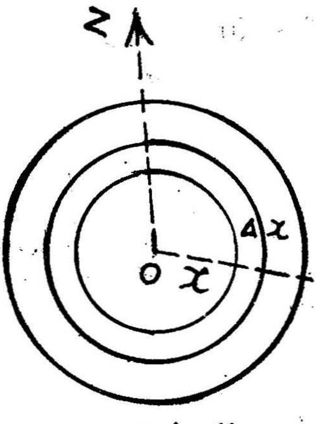
$= r^2 \Sigma \triangle m = Mr^2$

$= MK^2$ ...... வாய்பாடு ......(ii)

∴ கம்பியின் சுழியாரை $K = r$, வட்ட ஆரை.

எ. கா. 3.

r ஆரையுள்ள, மெல்லிய, சம அடர்த்தியுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டின் மையத்தின் வழியாகத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டி நி. நெ. தி காண்க.



படம் 61.

வட்டத்தகட்டின் நிறை

$M = \pi r^2 \rho$, ρ அடர்த்தி ஒரு மாறிலி.

தகட்டை நுண்ணிய, $\triangle x$ இடைவெளியுள்ள x, $x + \triangle x$ ஆரைகள் கொண்ட, பொதுமைய வட்ட வளையங்களாக்கினுல் (rings), இரு வட்டங்களுக்கு மிடைப்பட்ட நுண் பகுதியின் நிறை $\triangle x \to 0$ எல்லையில் (ஒரு படி அண்ணளவுக்கு) $\rho \cdot 2\pi x \cdot \triangle x$ எனவாகும்.

∴ வட்டத்தகட்டின் நி. நெ. தி. வாய்பாடு (ii) ஐக் கொண்டு $\Big\} \sum_{0}^{r} (\rho\ 2\pi x \cdot \triangle x)\, x^2$

$$= \int_0^r \rho \cdot 2\pi x^3 \cdot dx = 2\pi\rho \left(\frac{x^4}{4}\right)_0^r$$

$$= \rho \cdot \pi \frac{r^4}{2} = \frac{1}{2}(\rho\pi r^2)\, r^2$$

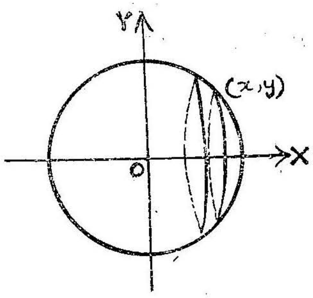
$$= \tfrac{1}{2} Mr^2 \qquad \text{........ வாய்பாடு (iii)}$$

∴ சுழியாரை $= \dfrac{r}{\sqrt{2}}$

எ. கா. 4

ஒரு கோளத்தின் நி. நெ. திறனை அதன் ஒரு விட்டத்தை யொட்டிக் காண்க.

r-கோளத்தின் ஆரையெனில், அதன் நிறை $= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. விட்டத்தை x-அச்சாகக் கொண்டு அதற்குச் செங்குத்தான நுண்ணிய $\triangle x$ தடிப்புள்ள வட்டத்தகடுகளாகக் கோளத்தை வெட்டுவோமானால்,



படம் 62.

$\triangle x \to 0$ என்ற எல்லையில் ஒரு வட்டத்தகட்டின் நிறை

$= \pi\, y^2 \cdot \triangle x \cdot \rho$ (ρ-அடர்த்தி ஒரு மாறிலி).

OX-ஐ ஒட்டி வாய்பாடு (iii) ஐக்கொண்டு

அதன் நி. நெ. தி. $= (\pi y^2 \cdot \triangle x \cdot \rho)\, \dfrac{y^2}{2}$

$$\text{கோளத்தின் நி. நெ. தி.} = \sum_{-r}^{+r} (\pi y^2 \cdot \triangle x \cdot \rho) \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$= 2 \int_0^r \rho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot y^4 \cdot dx$$

$$= \rho \cdot \pi \int_0^r y^4 \cdot dx = \rho \cdot \pi \int_0^a (r^2 - x^2)^2 \, dx$$

$$= \rho \cdot \pi \int_0^r (r^4 - 2r^2x^2 + x^4) \, dx \; ; \; r\text{-மாறிலி}$$

$$= \rho \pi r^5 \left(1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\right) = \rho \cdot \pi \, \tfrac{8}{15} r^5$$

$$= \left(\rho \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \pi r^3\right) \tfrac{2}{5} \cdot r^2$$

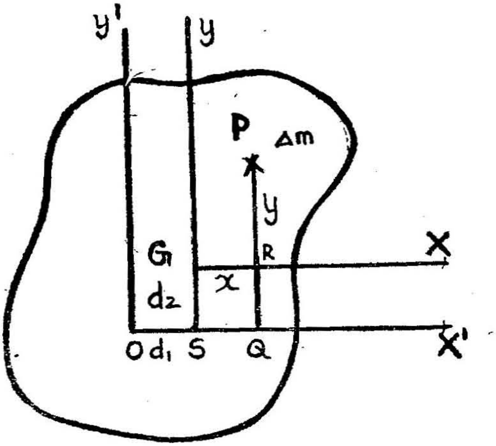
$$= \tfrac{2}{5} M \cdot r^2 \cdot \qquad \text{வாய்பாடு (iv)}$$

$$\therefore \; K = \sqrt{\tfrac{2}{5}} \cdot r$$

§ 51. இணை அச்சுத்தேற்றம் (Theorem of Parallel Axes)

தேற்றம் : ஒரு பொருளின் பு. க. மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் அச்சையொட்டி அதன் நி. நெ. தி. I என்றால், d தூரத்திலுள்ள இணையான அச்சையொட்டி அப்பொருளின் நி. நெ. தி. $I' = I + Md^2$: M-என்பது பொருளின் நிறை.

பொருளைச் சமதளத் தகடாகக் கொள்வோம்.



படம் 63.

பொருளின் பு. க. மையம் G-யை ஆதிப்புள்ளியாகவும் $G X$, Gy-ஐ அச்சுகளாகவும் கொள்வோம்.

$\triangle m$ — $P(x, y)$ என்ற புள்ளியில் நுண்பகுதியின் நிறையெனில், பு. க. மையம், G, ஆதிப்புள்ளியாதலால்

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(\triangle m \cdot x)}{(\Sigma \triangle m)} = 0 \qquad \therefore \Sigma(\triangle m \cdot x) = 0 \qquad \text{...(i)}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma(\triangle m \cdot y)}{\Sigma(\triangle m)} = 0 \qquad \therefore \Sigma(\triangle m \cdot y) = 0 \qquad \text{...(ii)}$$

Gy-ஐ யொட்டிப் பொருளின் நி. நெ. தி.

$$= \Sigma(\triangle m \cdot x^2) = Iy,$$

Gx-ஐ யொட்டிப் ,, $= \Sigma(\triangle m \cdot y^2) = Ix$
என்போம்.

O எனும் புள்ளி வழியாக, Ox', Oy' என்ற Gx, Gyகளுக்கு இணையான அச்சுகள் வரைக. இவ்வச்சுகளை யொட்டிப் புள்ளிகள் G-(d_1, d_2) $P(x', y')$, எனில் $x' = x + d_1$, $y' = y + d_2$

Oy'-ஐ ஒட்டிப் பொருளின் நி. நெ. தி. $= \Sigma(\triangle m \cdot x'^2) = I'y$

Ox'-ஐ ,, ,, ,, $= \Sigma(\triangle m y'^2) = I'x$

$$\begin{aligned} I'y &= \Sigma \triangle m \cdot x'^2 = \Sigma(\triangle m)(x + d_1)^2 \\ &= \Sigma \triangle m(x^2 + d_1^2 + 2d_1 x_9) \\ &= \Sigma \triangle m \cdot x^2 + \Sigma \triangle m\, d_1^2 + \Sigma \triangle m \cdot 2d_1 x \\ &= \Sigma \triangle m \cdot x^2 + d_1^2 \Sigma \triangle m + 2d_1 \Sigma \triangle m \cdot x \\ &= Iy + Md_1^2, \qquad \text{(i)} \quad (\therefore \Sigma \triangle m \cdot x = 0) \end{aligned}$$

அதுபோலவே

$$I'x = Ix + M d_2^2 \qquad \text{(ii)} \quad (\therefore \Sigma(\triangle m \cdot y) = 0)$$

கிளை 1. I என்பது பு. க. மையத்தின் வழியாகத் தகட்டின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டிய நி. நெ. தி. எனவும், I' என்பது O-வழியாகத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓர் இணை அச்சையொட்டிய நி. நெ. தி. எனவுமிருப்பின், முன் பக்கத்திலுள்ள படத்திற்கண்டபடி (படம் 63),

$$\begin{aligned} I' &= \Sigma \triangle m \cdot OP^2 = \Sigma \triangle m(OQ^2 + QP^2) \\ &= \Sigma \triangle m[(x + d_1)^2 + (y + d_2)^2] \end{aligned}$$

$$= \Sigma \triangle m\,[x^2 + d_1^2 + 2d_1 x] + \Sigma \triangle m\,[y^2 + d_2^2 + 2d_2 y]$$

$$= \Sigma \triangle m\,(x^2 + y^2) + \Sigma \triangle m\,(d_1^2 + d_2^2) + 2d_1 \Sigma (\triangle m - 1\,x) + 2d_2 \Sigma (\triangle m + y)$$

$$= \Sigma \triangle m \cdot GP^2 + \Sigma \triangle m \cdot OG^2$$

$$= \Sigma \triangle m \cdot r^2 + \Sigma \triangle m \cdot d^2 \qquad \begin{bmatrix} GP = r \\ OG = d \end{bmatrix}$$

$$= I + Md^2$$

கிளை 2. ஒரு பொருளின் முப்பரிமாணத்திலும் இத் தேற்றத்தின் உண்மையைக் காணலாம்.

கிளை 3. இத்தேற்றத்திலிருந்து, பு. க. மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் அச்சையொட்டிய நி. நெ. தி. மிகக் குறைந்தது எனக் காணலாம். $\therefore\ I' = I + Md^2$-ல் $d = 0$

§ 52 செங்குத்து அச்சுத்தேற்றம்: (Theorem of Perpendicular Axes)

தேற்றம்: Ix, Iy என்பன ஒரே தளத்திறுள்ள ஒரு பொருளின் Ox, Oy என்ற அச்சுகளையொட்டிய நி. நெ. தி. எனில், O-வழியாகத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டிய நி. நெ. தி.

$$I = Ix + Iy$$

$\triangle m$ நுண்பகுதிப் பொருளின் புள்ளி $P(x, y)$, $OP = r$ எனில் $Iy = \Sigma \triangle m \cdot x^2$; $Ix = \Sigma \triangle m \cdot y^2$

$$\therefore\ Iy + Ix = \Sigma \triangle m \cdot x^2 + \Sigma \triangle m \cdot y^2$$

$$= \Sigma\,[\triangle m\,(x^2 + y^2)]$$

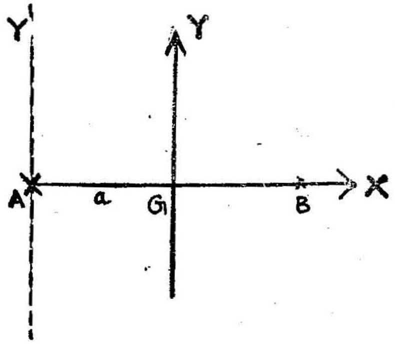
$$= \Sigma\,[\triangle m \cdot r^2] = I$$

எ. கா. 1.

$2a$ நீளமுள்ள நேரான மெல்லிய கோலின் நி. நெ. திறனை அக் கோலின் முனையில் செங்குத்தாக உள்ள அச்சையொட்டிக் காண்க.

Gy-ஐ யொட்டி நி. நெ. தி. $= \dfrac{Ma^2}{3}$ எனக் கண்டோம்.

இணை அச்சுத்தேற்றப்படி Ay'-ஐ ஒட்டி நி. நெ. தி.



படம் 64.

$$= \frac{Ma^2}{3} + Ma^2 = \frac{4}{3} Ma^2$$

எ. கா. 2.

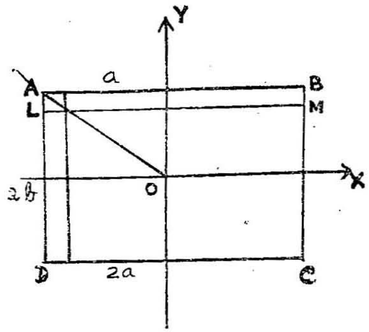
$2a$, $2b$ நீள, அகலமுள்ள ஒரு நீள்சதுரத்தகட்டின் நி. நெ. தி.

(i) நீளப்பக்கங்களின் மையங்களைச்சேர்க்கும் நேர்கோட்டை அச்சாக,

(ii) அகலப்பக்கங்களின் மையங்களைச்சேர்க்கும் நேர் கோட்டை அச்சாக

(iii) தகட்டின் பு.க. மையத்தின் வழியாகத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான கோட்டை அச்சாக

(iv) நீள்சதுரத்தின் ஒருமுனையில் தளத்திற்குச் செங்குத்தான கோட்டை அச்சாகக் கணக்கிடுக.



படம் 65.

(i) நீள்சதுரத்தை நீளப்போக்கில் நுண்ணிய அகலமும், $2a$ நீளமுமுள்ள $\triangle m$ நிறையுள்ள கோல்களாக வெட்டினால்,

$$\text{நி.நெ.தி.} = \Sigma \triangle m \cdot \frac{a^2}{3}$$

$$= \frac{a^2}{3} \Sigma \triangle m = M \frac{a^2}{3} \text{ ஆகும்.}$$

(ii) அகலப்போக்கில் நுண்ணிய அகலமுள்ள கோல்களாக வெட்டினால்

$$\text{நி.நெ.தி.} = M \frac{b^2}{3}$$

(iii) பு.க. மையமானது எதிர்ப்பக்க மையங்களைச்சேர்க்கும் இருகோடுகளின் சந்திப்பு, O. OZ தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்செனில்,

$$I = I_y + I_x = M \frac{(a^2 + b^2)}{3}$$

(iv) AZ', OZ-க்கு இணையெனில், AZ'-ஐ ஒட்டி நி.நெ.தி

$$I' = I + M \cdot OA^2 = M \frac{a^2 + b^2}{3} + M(a^2 + b^2)$$

$$= \tfrac{4}{3} M(a^2 + b^2)$$

குறிப்பு : ஒரு நீண்ட கனசதுரத்தின் நீள, அகல, உயரங்கள் முறையே $2a$, $2b$, $2c$ எனில் அதன் பு.க. மையம் வழியாகப் பக்க தளங்களுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள அச்சுகளை யொட்டி நி.நெ. திறன்

(i) நீள, அகலங்கொண்ட தளங்களுக்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டி $M \frac{(a^2 + b^2)}{3}$ ஆகும்.

(ii) நீள, உயரங்கொண்ட தளங்களுக்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டி $M \frac{(a^2 + c^2)}{3}$ ஆகும்.

(iii) அகல, உயரங்கொண்ட தளங்களுக்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டி $M \frac{(b^2 + c^2)}{3}$ ஆகும்.

எ. கா. 3

ஒரு வட்டத்தகட்டின் தளத்திலுள்ள (i) ஒரு விட்டத்தை அச்சாகக்கொண்டு (ii) ஒரு தொடுகோட்டை அச்சாகக்கொண்டு அதன் நி.நெ.தி. காண்க.

(i) a ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தகட்டின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக பு.க. மையம் வழியாகச் செல்லும் அச்சையொட்டி

நி.நெ.தி. $= M \frac{a^2}{2}$

வட்டத்தளத்தில் செங்குத்தாக இரு விட்டங்களையொட்டி நி.நெ.தி. சமமாகவிருக்கும். ஒவ்வொன்றும் I எனில் செங்குத்து

அச்சுத் தேற்றப்படி, $I + I = M \frac{a^2}{2}$

$$\therefore \quad I = M \frac{a^2}{4}$$

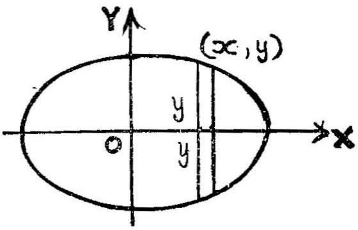
(ii) தளத்தில் வட்டத்தைத் தொடுகோடு அதற்கு இணையான விட்டத்திலிருந்து a தூரத்திலிருக்கும் ஆதலால் இணை அச்சுத் தேற்றத்தின்படி

$$I = \frac{Ma^2}{4} + Ma^2 = \frac{5}{4} Ma^2$$

எ. கா. 4.

ஒரு நீள்வட்டத்தின் நி.நெ. திறனை அதன் நெட்டச்சை யொட்டிக் காண்க.

நீள்வட்டத்தை அதன் நெட்டச்சுக்குச் செங்குத்தாக $\triangle x$ அகலமுள்ள நுண்பகுதிச் செவ்வகங்களாக வெட்டினால் $2y$ நீளமுள்ள நுண்பகுதியின் நிறை



படம் 66.

$$\triangle m = \rho \cdot 2y \cdot \triangle x.$$

OX-ஐ யொட்டி அதன் நி.நெ.தி

$$= \triangle m \cdot \frac{y^2}{3}$$

∴ நீள்வட்டத்தின் நி.நெ.தி $= \sum_{-a}^{+a} (\triangle m) \cdot \frac{y^2}{3}$

$$= 2 \sum_{0}^{a} (\rho \cdot 2y \triangle x) \cdot \frac{y^2}{3}$$

$$= \frac{4\rho}{3} \int_{0}^{a} y^3 \cdot dx = \frac{4\rho}{3} \int y^3 \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta$$

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடுகள் $x = a \cos \theta$

$y = b \sin \theta$ என்று

கொண்டால்

நி.நெ.தி. $= \frac{4\rho}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} b^3 \sin^3\theta \cdot a \sin\theta \cdot d\theta$

$$= \frac{4\rho}{3} ab^3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{4}{3} \rho\, ab^3 \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \rho \frac{\pi b^3}{4}$$

$$= (\pi ab \cdot \rho) \frac{b^2}{4} = M \cdot \frac{b^2}{4}$$

சுழியாரை $= \frac{b}{2}$

கிளை. 1. குற்றச்சையொட்டி

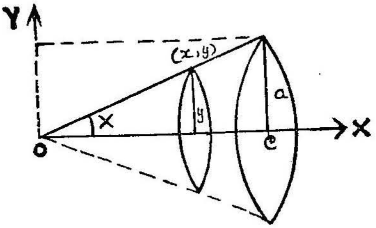
$$\text{நி.நெ.தி.} = M\frac{a^2}{4}$$

மையம்வழியாகத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டி

$$\text{நி.நெ.தி.} = \frac{M}{4}(a^2 + b^2)$$ என அறியலாம்.

எ. கா. 5.

ஒருநேர் வட்டக்கூம்பின் (i) அச்சையொட்டி (ii) அதன் முனை வழியாக அச்சுக்குச்செங் குத்தான ஒரு கோட்டை யொட்டி நி.நெ.தி.காண்க.



படம் 67.

(i) வட்டக்கூம்பை அதன் அச்சுக்குச் செங்குத்தான $\triangle x$ தடிப் புள்ள, y ஆரையுள்ள நுண்பகுதி வட்டத்தகடுகளாக வெட்டினால்

$$\triangle m = \pi y^2 \cdot \triangle x \cdot \rho$$

மையத்தின்வழியாக வட்டத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டி

$$\text{நி.நெ.தி.} = (\triangle m) \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$\therefore \text{ வட்டக்கூம்பின் நி.நெ.தி.} = \sum (\triangle m) \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$= \sum \pi y^2 \rho \cdot \triangle x \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$= \int_0^h \pi \rho \cdot \frac{y^4}{2} \cdot dx$$

கூம்பின் உச்சிக்கோணத்தில்பாதி α எனில்,

$$y = x \tan \alpha$$

$$\therefore \text{ நி.நெ.தி.} = \tfrac{1}{2}\int_0^h \pi \cdot \rho \cdot \tan^4\alpha \cdot x^4 \cdot d.$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho \cdot \tan^4\alpha \cdot \left(\frac{x^5}{5}\right)_0^h; \quad \tan\alpha = \frac{a}{h}$$

$$= \pi\rho \tan^4\alpha \cdot \frac{h^5}{10} = \pi\rho \frac{a^4}{h^4} \cdot \frac{h^5}{10}$$

$$= \frac{\pi\rho \cdot a^4 h}{10} = \left(\frac{1}{3}\pi a^2 h \rho\right) \times \frac{3}{10} a^2$$

$$= \frac{3}{10} Ma^2$$

(ii) $\triangle m$ நிறையுள்ள வட்டத்தகட்டின் தளத்திலுள்ள ஒரு விட்டத்தையொட்டி அதன்

$$\text{நி.நெ.தி.} = (\triangle m)\frac{y^2}{4}$$

$\therefore$ OY அச்சையொட்டி வட்டத்தகட்டின்

$$\text{நி.நெ.தி.} = (\triangle m)\frac{y^2}{4} + \triangle m \cdot x^2$$

$$= \triangle m\left(\frac{y^2}{4} + x^2\right)$$

$$= (\pi y^2 \cdot \rho \cdot \triangle x)\left(\frac{y^2}{4} + x^2\right)$$

$\therefore$ OY-ஐ யொட்டி வட்டக்கூம்பின்

$$\text{நி.நெ.தி.} = \sum (\pi y^2 \cdot \rho \cdot \triangle x)\left(\frac{y^2}{4} + x^2\right)$$

$$= \int_0^h \pi\rho \cdot y^2 \left(\frac{y^2}{4} + x^2\right) dx$$

$$= \pi\rho \int_0^h \left(\frac{y^4}{4} + x^2 y^2\right) \cdot dx$$

$$= \pi\rho \int_0^h \left(\tan^4\alpha \cdot \frac{x^4}{4} + x^2 \cdot x^2 \tan^2\alpha\right) dx$$

$$= \pi\rho \left(\tan^4\alpha \cdot \frac{h^5}{5\cdot 4} + \tan^2\alpha \cdot \frac{h^5}{5}\right)$$

$$= \pi\rho \cdot \frac{\tan^2\alpha \cdot h^5}{20} (\tan^2\alpha + 4)$$

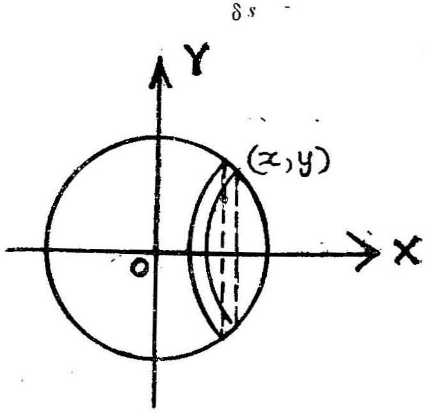
$$= \frac{\pi\rho}{20} \cdot \frac{a^2}{h^2} h^5 \left(\frac{a^2}{h^2} + 4\right) = \frac{\pi\rho}{20} a^2 h (a^2 + 4h^2)$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}\pi a^2 h \rho\right) \cdot \tfrac{3}{20} (a^2 + 4h^2)$$

$$= \tfrac{3}{20} M (a^2 + 4h^2)$$

எ. கா. 6.

ஒரு விட்டத்தையொட்டி ஒருகோளத்தின் புறப்பரப்பின் நி.நெ.தி. காண்க.



படம் 68.

கோளத்தின் புறப் பரப்பை விட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளீடற்ற கூம்புத் துண்டுகளாக் கிஞல், (x,y) புள்ளியில் $\triangle s$ சாய்வுயரமுள்ள ஒரு கூம்புத்துண்டத்தின் (Frustum) புறப்பரப்பு $= 2\pi y \cdot \delta s$. அதன் நிறை, $\triangle m = 2\pi y \cdot \rho \cdot \partial s$. கூம்புத் துண்டின் அடிவட்ட மையத்தின் வழியாக அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டி நி. நெ. தி. $= \triangle m \cdot y^2 = (2\pi y \cdot \rho\, \delta s)\, y^2$

கோளப்புறப்பரப்பின் நி.நெ.தி

$$= \sum_{-a}^{+a} (2\pi y \cdot \rho\, \partial s)\, y^2$$

$$= 2 \int_0^a 2\pi\rho \cdot y \cdot y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$$= 4\pi\rho \int_0^a y^3 \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot dy\,,$$

$$\because \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$= 4\pi\rho \int_0^a y^2 \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx$$

$$= 4\pi\, \rho \cdot a \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta$$

$$= 4\pi\, \rho \cdot a \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin\theta \cdot a \sin\theta \cdot d\theta.$$

$$x = a \cos\theta.$$
$$y = a \sin\theta.$$

$$= 4\pi\, \rho\, a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta.\, d\theta.$$

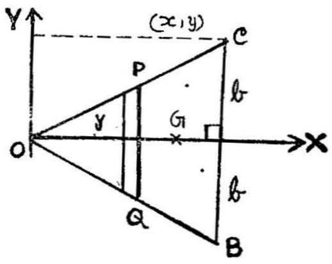
$$= 4\pi\, \rho \cdot a^4\, \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{3}\, \pi\rho\, a^4.$$

$$= (4\pi a^2\, \rho)^2 \cdot \frac{a^2}{3} = 2\, M \frac{a^2}{3}$$

எ. கா. 7.

இரு சமபக்க $\triangle OBC$-யின் உயரம் h, அடிப்பக்கம் $BC = 2b$, O முனை வழியாக அடிப்பக்கத்திற்கு இணையான அச்சையொட்டி நி. நெ. தி. காண்க.

BC-யின் மையக்குத்து OX—x அச்சாகவும் OY—y அச்சாகவும் கொண்டு, BC-க்கு இணையான, $\triangle x$ தடிப்புள்ள PQ என்ற நுண் பகுதிகளாக முக்கோணத்தைப் பிரிக்கலாம்.



படம் 69.

$$\triangle m = 2y\rho \cdot \triangle x.$$

PQ என்ற நுண் பகுதியின் பு.க. மையம் அதன் மையத்தில் x-அச்சின் மேல் O-விலிருந்து x-தூரத்திலுள்ளது.

$\therefore$ OY-ஐயொட்டி நுண் பகுதியின் நி. நெ. தி.

$$= \triangle m \cdot x^2 = (2y\,\rho \cdot \triangle x)\, x^2$$

$$\therefore \quad \triangle OBC\text{-யின் நி. நெ. தி.} = \sum_0^h \triangle m\, x^2 = \sum_0^h (2y\,\rho \cdot \triangle x) \cdot x^2.$$

$$= \int_0^h 2y \cdot x^2 \rho \cdot dx,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{h} \quad \therefore \quad y = \frac{b}{h}\,x.$$

$$= \int_0^h 2\rho \cdot \frac{b}{h} \cdot x \cdot x^2\, dx$$

$$= 2\rho\,\frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{4}$$

$$= \frac{\rho b h^3}{2} = (bh\,\rho)\,\frac{h^2}{2}$$

$$= M$$

கிளை : 1. OX-ஐ ஒட்டி நி. நெ. தி. $= \Sigma \Delta m. \frac{y^2}{3}$

$$= \int_0^h 2y\rho \cdot \frac{y^2}{3}\, dx$$

$$= \frac{2\rho}{3} \int_0^h \frac{b^3}{h^3} \cdot x^3 \cdot dx$$

$$= \frac{2\rho}{3} \cdot \frac{b^3}{h^3} \times \frac{h^4}{4} = \frac{\rho h\, b^3}{6} = \frac{Mb^2}{6}$$

கிளை : 2. பு. க. மையம் G வழியாக OY-க்கு இணையாக உள்ள அச்சையொட்டி நி. நெ. தி. காண இணை அச்சுத் தேற்றத்தின் படி,

$$I' = I + Md^2$$

இங்கு $M \frac{h^2}{4} = I + M \left(\frac{2}{3}\, h\right)^2$

$$\therefore \quad I = \frac{Mh^2}{2} - M. \frac{4}{9}\, h^2 = \frac{Mh^2}{18}$$

கிளை : 3. BC-யை யொட்டி நி. நெ. தி.

$$I' = I + Md^2$$

$$= \frac{Mh^2}{18} + M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{Mh^2}{18} + \frac{Mh^2}{9}$$

$$= \frac{Mh^2}{}$$

கிளை : 4. OBC தளத்திற்குச் செங்குத்தாக G வழியாகச் செல்லும் அச்சையொட்டி

நி. நெ. தி $I = Ix + Iy$

$$= \frac{1}{6} Mb^2 + \frac{Mh^2}{18} = \frac{M}{18}(3b^2 + h^2)$$

கிளை : 5. தளத்திற்குச் செங்குத்தாக B முனை வழியே செல்லும் அச்சையொட்டி.

$$I' = I + Md^2$$

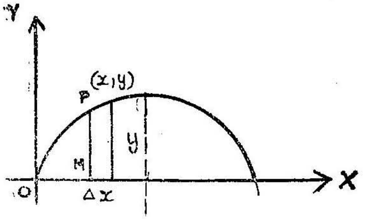
$$= \frac{M}{18}(3b^2 + h^2) + M \cdot BG^2.$$

$$= \frac{M}{18}(3b^2 + h^2) + M\left[b^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2\right]$$

$$= Mb^2\left(\tfrac{1}{6} + 1\right) + Mh^2\left[\tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{9}\right]$$

$$= Mb^2 \times \frac{7}{6} + Mh^2 \times \frac{1}{6} = \frac{M}{6}(h^2 + 7b^2)$$

எ. கா. 8.



படம் 70.

$x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற உருள் வளைக்கும் அதன் அடிக் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்புக்கு அடிக்கோட்டை யொட்டி நி. நெ. தி. காண்க.

$P\ (x, y)$ புள்ளியிலிருந்து x-அச்சுக்கு PM குத்துக்கோடு வரைக.

$(PM \cdot \delta x)$ என்ற நுண் பாகங்களாகப் பரப்பைப் பிரித்தால்
$\triangle m = y \cdot \triangle x \cdot \rho$

வாய்பாட்டின்படி, OX-ஐ யொட்டி $\triangle m$-ன் நி. நெ. தி.

$$= \triangle m \cdot \frac{4}{3}\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \triangle m \cdot \frac{y^2}{3}$$

$\therefore$ முழுப்பரப்பின் நி. நெ. தி. $= \sum \Delta m \dfrac{y^2}{3}$

$$= \sum_{0}^{2\pi a} y \cdot \rho \cdot \triangle x \cdot \frac{y^2}{3}$$

$$= \int_0^{2\pi a} \rho . \frac{y^3}{3} . dx$$

$$= \frac{\rho}{3}\int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos\theta)^3 . a (1 - \cos\theta)\, d\theta.$$

$$= \frac{a^4 . \rho}{3}\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^4 \cdot d\theta.$$

$$= \frac{a^4 \cdot \rho}{3} . 2\int_0^{\pi} \left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^4 \cdot d\frac{\theta}{2} \times 2$$

$$= \frac{64}{3} \rho \cdot a^4 . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\phi\, d\phi\ ;\ \phi = \frac{\theta}{2}$$

$$= \rho \cdot \frac{64}{3} . a^4 . \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \tfrac{35}{12} \cdot \pi \rho a^4 = 3\pi a^2 \rho \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{35}{12} a^2$$

$$= M \cdot \tfrac{35}{36} a^2 = \tfrac{35}{36} Ma^2 : \because\ M = (3\pi a^2 \rho)$$

பயிற்சிகள் 40

1. a அலகுகள் நீளமுள்ள ஒரு கோலின் (rod) அடர்த்தி அதன் ஒரு முனையிலிருந்து தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது. அம் முனையில் கோலுக்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டிக் கோலின் நி. நெ. தி. காண்க.

2. a-ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டின் அடர்த்தி மையத்திலிருந்து புள்ளிகளுள்ள தூரத்தைப் போல் K மடங்கு மையத்தின் வழியாகத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டி வட்டத்தின் நி. நெ. தி. காண்க.

3. ஒரு நீள் வட்டத்தின் நி. நெ. திறனை பு. க. மையத்தில் தளத்திற்குச் செங்குத்தான கோட்டை யொட்டிக் காண்க.

4. **கீழ்க்கண்டவற்றின் நிறை M எனக் கொண்டு நி. நெ. தி. காணவும்.**

(i) a பக்கமுள்ள ஒரு சதுரத்திற்கு அதன் ஒரே மூலை விட்டத்தையொட்டி.

(ii) a ஆரையும், 2 α மையக்கோணமுமுள்ள ஒரு வட்ட கோணப்பகுதிக்கு (sector) தளத்திற்குச் செங்குத்தான மையத்தில் வரைந்த அச்சையொட்டி.

(iii) செவ்வகலத்தை (latus rectum) ஒட்டி ஒரு நீள் வட்டத்திற்கு.

(iv) இயக்கு வரையை (directric) யொட்டி ஒரு நீள் வட்டத்திற்கு.

(v) a, b ஆரைகளுள்ள இரு பொதுமைய வட்டங்களுக் கிடைப்பட்ட பரப்புக்கு (1) ஒரு விட்டத்தை யொட்டி (2) தளத் திற்குச் செங்குத்தாகப் பொது மையத்தின் வழியாகவுள்ள கோட்டை யொட்டி.

5. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவை அதன் செவ்வகலம் (latus rectum) வெட்டும் பகுதிக்கு (1) அதன் உச்சியில் வரைந்த தொடு கோட்டை யொட்டி நி. நெ. தி. $\frac{3}{7} Ma^2$ என்றும், (2) அதன் அச்சையொட்டி நி. நெ. தி. $\frac{4}{5} Ma^2$ என்றும் நிறுவுக.

6. ABC முக்கோணத்திற்கு (i) BC-யை யொட்டி (ii) அதன் உச்சியில் BC-க்கு இணையான கோட்டையொட்டி (உச்சி யிலிருந்து வரைந்த செங்கோட்டின் நீளம் p எனக் கொண்டு) நி. நெ. தி. காண்க.

7. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்திற்கு அதன் பு. க. மையத்தில் (centroid) தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சையொட்டி நி. நெ. தி. காணவும்.

8. நெஞ்சுவளை $r = a\ (1 + \cos\theta)$-ன் வில்லுக்கு அதன் துருவம் (pole) வழியாகத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சை யொட்டி நி. நெ. தி. காணவும்.

9. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற வளை வரைக்குள்ளடங்கிய பரப் பிற்கு ஒரு அச்சையொட்டி நி. நெ. தி. மதிப்பிடவும்.

10. $x = a\ (\theta - \sin\theta)$, $y = a\ (1 - \cos\theta)$ என்ற உருள் வளையின் நி. நெ. திறனை அதன் அடிக்கோட்டையொட்டிக் கணக்கிடுக.

11. ஒரு விட்டத்தையொட்டி a-ஆரையுள்ள உள்ளீடற்ற கோளத்தின் நி. நெ. தி. காணவும்.

12. ஒரு கன சதுரக்கட்டையின் ஓர் ஓரம் a நீளமுள்ளது. ஓர் ஓரத்தையொட்டிக் கட்டையின் நி. நெ. தி. காண்க.

13. a, b, c பக்கங்களுள்ள (prism) நேர் பட்டகத்தின் நி. நெ. தி காணவும்.

14. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் நி. நெ. தி. (i) அதன் அச்சையொட்டி (ii) அதன் ஒரு தோற்றுவிக்கும் கோட்டை (generating line) யொட்டி (iii) அதன் அடிவட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தையொட்டி, அடி ஆரம் r எனவும், உயரம் h எனவும் கொண்டு நி. நெ. தி. காணவும்.

15. a ஆரையுள்ள கோளத்தின் நி. நெ. தி. அதன் ஒரு விட்டத்தையொட்டிக் கணக்கிடுக.

16. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, x-அச்சையொட்டிச் சுழலும்போதுண்டாகும் உருளையின் நி. நெ. திறனைச் சுழலும் அச்சையொட்டிக் காண்க.

17. $x = a\ (\theta - \sin\theta)$, $y = a\ (1 - \cos\theta)$ என்ற உருள் வளையின் ஒரு பகுதி அடிக்கோட்டையொட்டிச் சுழலும் போதுண்டாகும் உருளையின் நி. நெ. திறனைச் சுழலும் அச்சையொட்டிக் காண்க.

18. உள்ளீடற்ற நேர்வட்டக் கூம்பின் நி. நெ. திறனை அதன் அச்சையொட்டிக் கணக்கிடுக.

19. R, r வெளி, உள் ஆரைகளுள்ள உள்ளீடற்ற நேர்வட்ட உருளையின் நி. நெ. திறனை அதன் அச்சையொட்டி $\frac{1}{2} M\ (R^2 + r^2)$ என நிறுவுக.

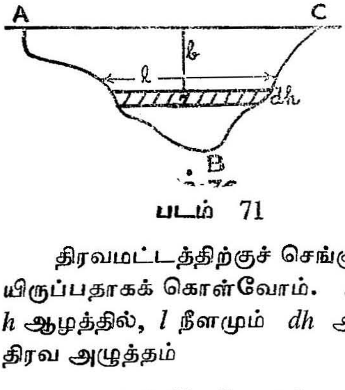
20. ஒரு கூம்பின் வெட்டுத்துண்டின் இரு முகங்களும் முறையே a, b ஆரைகள் கொண்டவை. அதன் நி. நெ. தி. அச்சையொட்டி $\frac{3M\ (a^5 - b^5)}{10\ (a^3 - b^3)}$ எனக்காட்டுக.

21. $y = e^{x} \cdot \cos x$ என்ற வளைவரை $(0, \pi)$ எல்லைகளில் x-அச்சையொட்டிச் சுற்றும்போதுண்டாகும் உருளையின் நி. நெ. தி சுழலும் அச்சையொட்டிக் காண்க.

14. அழுத்தமும், அழுத்த மையமும்

(Pressure & centre of pressure)

§ **53. அழுத்தம் :** ஒரு பரப்பு ஒரு திரவத்தில் மூழ்கியுள்ள போது, அதன் மேல், திரவத்தின் எடையால் (weight) அழுத்தம் ஏற்படுகிறது. அழுத்தமென்பது ஒரு சதுர அலகுள்ள பரப்பின் மேல் திரவத்தின் எடையாகும் (weight). ஒரு கன அலகு திரவத்தின் எடை w என்றும் மூழ்கிய ஆழம் h என்றும் கொண்டால் அழுத்தம் $p = wh$ என அறிவோம். திரவத்தின் அழுத்தம் எல்லா திசைகளிலும் சமமாக இயங்கும் என்ற தத்துவத்தின்படி, திரவத்தில் மூழ்கியுள்ள ஒரு பரப்பின் மேலேற்படும் மொத்த அழுத்தத்தைக் கணக்கிடுகிறோம்.



படம் 71

திரவமட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக ஒரு பரப்பு திரவத்தில் மூழ்கியிருப்பதாகக் கொள்வோம். அப்பரப்பில் திரவ மட்டத்திலிருந்து h ஆழத்தில், l நீளமும் dh அகலமுமுள்ள நுண்பகுதியின் மேல் திரவ அழுத்தம்

$$\triangle F\ (l \cdot dh \cdot w)\ h.$$

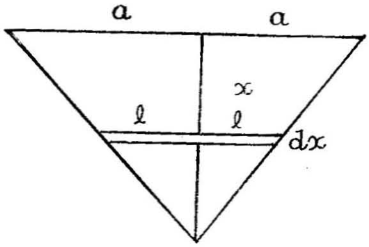
$\therefore$ ABC பரப்பின் மேல்

மொத்த அழுத்தம் $F = \int w\,h\,l\,dh$ (ஏற்ற எல்லைக்குள்)

எ. கா.

$2a$ பக்கங்களுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்திற்கு அதன் ஒரு பக்கம் நீர்மட்டத்திலிருக்குமாறு தளத்திற்குச் செங்குத்தாக மூழ்கியிருக்கிறது. அத்தகட்டின் ஒரு புறத்திலேற்படும் நீரின் அழுத்தத்தைக் காண்க.

சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம் $= \sqrt{3} \cdot a$. $2l$ நீளமுள்ள நுண் பரப்பு x ஆழத்திலுள்ளதாகக் கொள்வோம்.



படம் 72

நுண் பரப்பு $\triangle A = 2l \cdot \triangle x$

நுண் அழுத்தம்
$\triangle F = (2l\, x \triangle x)\, \omega$

$$\therefore\ F = \int_0^{\sqrt{3}a} \omega \cdot 2l\, x \cdot dx., \quad \frac{l}{a} = \frac{\sqrt{3}\,a - x}{\sqrt{3}\,a}$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}a} \cdot 2\,\omega x \cdot a \left(1 - \frac{x}{\sqrt{3a}}\right) dx$$

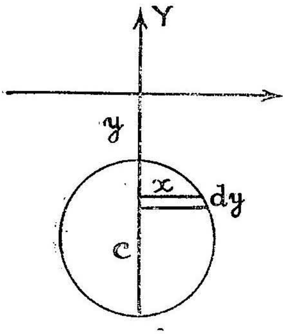
$$= 2\,\omega a \int_0^{\sqrt{3a}} x \left(1 - \frac{x}{\sqrt{3}\,a}\right) dx$$

$$= 2\,a\omega \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{3a}} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3a}}$$

$$= 2\,a\omega \left[\frac{3a^2}{2} - \frac{3\sqrt{3} \cdot a^3}{3\sqrt{3}\,a}\right]$$

$$= 2\,a\omega \left[\frac{a^2}{2}\right] = \omega \cdot a^3.$$

எ. கா. 2.



படம் 73

2 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வட்ட வடிவமான மதகின் மையம் நீர்மட்டத்திலிருந்து 6 அடி ஆழத்திலுள்ளது. மதகின் மேல் நீரின் அழுத்தத்தைக் கணக்கிடுக.

$$OC = 6$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + (y+6)^2 = 4$$

$$\triangle F = (2x \cdot dy \cdot \omega)y$$

$$\therefore \quad F = \int_{-8}^{-4} 2xy \cdot \omega \, dy$$

$$= \int_{-8}^{-4} 2\,\omega y \sqrt{4-(y+6)^2} \cdot dy$$

$x = 2\cos\theta$; $y + 6 = 2\sin\theta$ என்ருல்

$dy = 2\cos\theta \cdot d\theta$.

$$\therefore \quad F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2\omega\,(2\sin\theta - 6)\, 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta \cdot d\theta$$

$$= 8\,\omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta - 8\omega \int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} 6\cos^2\theta \cdot d\theta$$

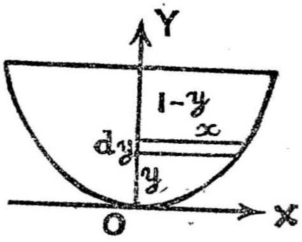
$$= 16\omega \left(\frac{-\cos^3\theta}{3}\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 16\omega \times 6 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot d\theta$$

$$= -\ 16\omega \times 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$|F| = 24\,\pi\omega$ அலகுகள்.

எ. கா. 3.

$y = x^2$ என்ற பரவளைவு வடிவத் தகடு செங்குத்தாக நீரில் அதன் உச்சி கீழிருக்குமாறு ஓர் அடி ஆழத்திற்கு மூழ்கியிருந்தால் அதன் ஒரு பக்கத்தில் நீரின் அழுத்தத்தைக் கணக்கிடுக.



படம் 74

$$\triangle F = 2x\,(1 - y)\,\omega$$

$$F = \int_0^1 2\omega\, x\,(1 - y)\, dy$$

$$= \int_0^1 2\omega \cdot \sqrt{y}\,(1 - y)\, dy$$

$$= 2\omega \int_0^1 (y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}) \cdot dy.$$

$$= 2\omega\,(\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5}) = \tfrac{8}{15}\,\omega.$$

பயிற்சிகள் 41

1. 3மீ × 4மீ. அளவுகளுள்ள ஒரு மதகு நீர் மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. 3மீ. பக்கம் நீர் மட்டத்தை யொட்டியிருந்தால், மதகின் ஒரு பக்கத்தில் நீரின் அழுத்தத்தைக் காண்க. [விடை 48ω]

2. 5மீ. அடி ஆரமுள்ள ஒரு நேர் உருளை வடிவத்தொட்டி கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு அதில் பாதி அளவுக்குக் கேசொலீன் (Gasoline) திரவம் நிறைந்திருக்கிறது. கேசொ

லேனின் எடை கனமீட்டருக்கு ω கி.கி. எனில் தொட்டியின் ஒரு வட்டவடிவப் பக்கத்தின் அழுத்தத்தைக் கணக்கிடுக.

$\left(\frac{250}{3}\ \omega\ \text{கி.கி.}\right)$

3. 2மீ. ஆரமுள்ள ஓர் அரைக்கோள வடிவமுள்ள பாத்திரத்தில் நீர் நிறைந்திருக்கிறது. பாத்திரத்தின் உட்பரப்பின் மேல் நீரின் அழுத்தத்தைக் காண்க. ($8\pi\ \omega$)

§ 54. அழுத்தமையம் (Centre of pressure)

ஒரு திரவத்தில் மூழ்கிய ஒரு பரப்பின்மேல் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் திரவத்தின் அழுத்தம் ωh என அறிவோம். h என்பது திரவ மட்டத்திலிருந்து புள்ளியின் ஆழம், ω என்பது ஒரு கன அலகு பருமனுள்ள திரவத்தின் எடை. அப்பரப்பின் மேலுள்ள அழுத்தம் முழுவதும் அப்பரப்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியின்மேல் இயங்குவதாகக் கொண்டால், அப்புள்ளிக்குத் திரவ அழுத்தமையம் (centre of pressure) என்று பெயர்.

$\triangle A$ பரப்பின் மேல் அழுத்தம் $= \triangle A \cdot y \cdot \omega$.

$\therefore$ A பரப்பின் மேல் அழுத்தம்

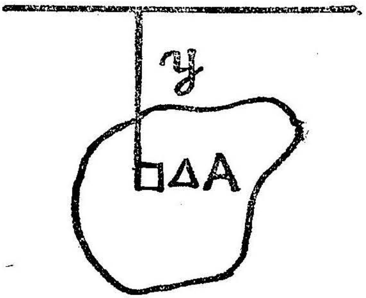
$= \int \omega \cdot y \cdot dA$

$= = \omega \int y \cdot dA$

$= \omega \cdot A \cdot \bar{y} = A(\bar{y} \cdot \omega)$

= பரப்பு × பரப்பின் பு.க. மையத்தின் மேல் அழுத்தம்

திரவ அழுத்தமையம் திரவ மட்டத்திலிருந்து z ஆழத்திலிருப்பதாகக் கொண்டு மட்டத்தை யொட்டி அழுத்தங்களின் சுழல் திறனைக் கணக்கிட்டால்,



படம் 75

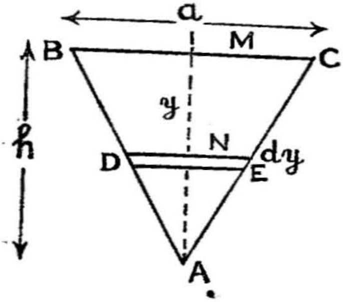
$$(A \cdot \bar{y} \cdot \omega)\, z = \int \omega \cdot y \cdot dA \cdot y$$

$$= \int \omega \cdot y^2 \cdot dA$$

$$z = \frac{\int y^2 \cdot dA}{A \cdot \bar{y}} = \frac{\int y^2 \cdot dA}{\int y \cdot dA}$$

குறிப்பு: வரையறுத்த தொகை காணுங்கால் பரப்பின் நுண் பகுதிகளைத் திரவ மட்டத்திற்கு இணையாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

எ. கா. 1.



படம் 76

ஒரு முக்கோணத் தகடு அதன் ஒரு பக்கம் இருக்குமாறு செங்குத்தாகத் திரவத்தில் மூழ்கியிருக்கிறது. திரவ அழுத்த மையத்தைக் கணக்கிடுக.

BC திரவ மட்டத்திலுள்ளது, $DE = x$, $NM = y$ எனில்

$$\frac{x}{a} = \frac{x-y}{h}$$

BC-க்கு இணையான நுண்பகுதி DE,-ன் பரப்பு, $\triangle A = x \cdot dy$

$$\therefore \quad z = \frac{\int y^2 \cdot dA}{\int y \cdot dA} = \frac{\int_0^h y^2 \cdot x\, dy}{\int_0^h y \cdot x \cdot dy}$$

$$= \frac{\int_0^h y^2\, a \frac{(h-y)}{h} \cdot dy}{\int_0^h y\, a \left(\frac{h-y}{h}\right) \cdot ay} = \frac{\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4}\right)}{\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{3}}$$

$$= h \times \frac{1}{12} \times \frac{6}{1} = \frac{h}{2}$$

தவிர, அழுத்த மையம் அடிப் பக்கத்திற்கு இணையாக வரைந்த கோடுகளின் நடுப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதை, அதாவது A முனையிலிருந்து அடிப்பக்கம் BC-க்கு வரைந்த நடுக்கோட்டிலுள்ளது என்பது தெளிவு.

ஆனால் ஆழம், $Z = \frac{h}{2}$. $\therefore$ அழுத்த மையம் இந் நடுக்கோட்டின் மையத்திலுள்ளது.

குறிப்பு : முக்கோணத்தகடு திரவ மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாயிராவிடினும் அழுத்தமையம் மாறாதென்றறியலாம்.

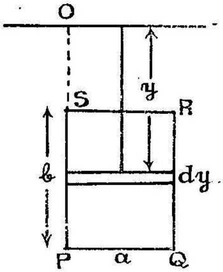
எ. கா. 2.

பக்கங்கள் a, b அளவுகளுள்ள ஒரு நீண்ட சதுரத்தகடு ஒரு திரவத்தில் செங்குத்தாக மூழ்கியிருக்கிறது. பக்கம் a-திரவ மட்டத்திற்கு இணையாகவும், தகட்டின் பு. க. மையம h $\left(< \frac{b}{2}\right)$ ஆழத்திலும் இருப்பதாகக் கொண்டு அழுத்தமையத்தைக் காண்க.

$$\triangle A = a \cdot dy$$

$$OP = h + \frac{b}{2}$$

$$OS = h - \frac{b}{2}$$



படம் 77

$$Z = \frac{\int_{h-\frac{b}{2}}^{h+\frac{b}{2}} y^2 \cdot dA}{\int_{h-\frac{b}{2}}^{h+\frac{b}{2}} y\, dA}$$

$$= \frac{\int y^2 \cdot a\, dy}{\int y \cdot a\, dy} = \frac{\int y^2 \cdot dy}{\int y \cdot dy} = \frac{\left(\frac{y^3}{3}\right)_{h-\frac{b}{2}}^{h+\frac{b}{2}}}{\left(\frac{y^2}{2}\right)_{h-\frac{b}{2}}^{h+\frac{b}{2}}}$$

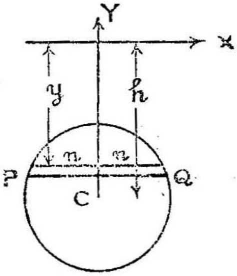
$$= \frac{\frac{1}{3}\left[\left(h+\frac{b}{2}\right)^3 - \left(h-\frac{b}{2}\right)^3\right]}{\frac{1}{2}\left[\left(h+\frac{b}{2}\right)^3 - \left(h-\frac{b}{2}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left[2 \cdot 3 \cdot h^2 \cdot \frac{b}{2} + 2 \cdot \frac{b^3}{8}\right]}{\frac{1}{2}\left[2 \cdot 2h \cdot \frac{b}{2}\right]} = \frac{\frac{1}{3}\left(3h^2 b + \frac{b^2}{4}\right)}{bh}$$

$$= h + \frac{b^2}{12h}$$

எ. கா. 3.

r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டததகடு ஒரு திரவத்தில் செங்குத்தாக $h\ (> r)$ ஆழத்தில் மூழ்கி இருக்கும்போது அழுத்த மையத்தைக் கணக்கிடுக.



படம் 78

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + (y + h)^2 = r^2$

$$\triangle A = 2 \cdot x \cdot dy$$

$$Z = \frac{\int_{-h-r}^{-h+r} y^2 \cdot dA}{\int_{-h-r}^{-h+r} y \cdot dA}$$

$$= \frac{\int_{-h-r}^{-h+r} y^2 \cdot 2x \cdot dy}{\int_{-h-r}^{-h+r} y^2 \cdot 2x \cdot dy} = \frac{\int_{-h-r}^{-h+r} y / \cdot x \cdot dy}{\int_{0}^{h} y \cdot x \cdot dy}$$

$$x = r \cos\theta$$

$$y + h = r \sin\theta \qquad dy = r \cos\theta \cdot d\theta$$

$$Z = \frac{\int_{-h-r}^{-h+r} (r \sin\theta - h)^2 \cdot r\cos\theta \cdot r\cos\theta \cdot d\theta}{\int_{-h-r}^{-h+r} (r \sin\theta - h) \cdot r\cos\theta \cdot r\cos\theta \cdot d\theta}$$

$$= \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \cdot \sin^2\theta - 2\sin\theta \cdot r \cdot h + h^2) \cdot \cos^2\theta \, d\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (r \sin\theta - h) \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta}$$

$$= \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta - 2hr \cdot \sin\theta \cos^2\theta + h^2 \cos^2\theta)\, d\theta}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (r\sin\theta \cdot \cos^2\theta - h \cos^2\theta) \cdot d\theta}$$

$$|Z| = \frac{r^2 \times \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + h^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{h \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\frac{r^2}{8} + \frac{h^2}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{r^2 + 4h^2}{4h}$$

பயிற்சிகள் 42

கீழே கொடுக்கப்பட்ட கணக்குகளில் அழுத்தமைய ஆழங் காண்க.

1. உச்சி, திரவமட்டத்திலும், அடிப்பக்கம் திரவமட்டத்திற்கு இணையாகவுமிருக்குமாறு ஒரு திரவத்திலாழ்ந்த ஒரு முக்கோணம்.

2. திரவமட்டத்திலிருந்து K ஆழத்தில் உச்சியிருக்குமாறும், அடிப்பக்கம் திரவமட்டத்திற்கிணையாகவும் ஒரு திரவத்தில் மூழ்கியிருக்கும் முக்கோணம்.

3. 3 அடி × 4 அடி அளவுகளுள்ள ஒரு நீள்சதுரத்தின் குறுகிய பக்கங்கள் திரவமட்டத்திற்கு இணையாகவும் இவற்றின் மேற்பக்கம் திரவமட்டத் திலிருந்து 2 அடி ஆழத்திலிருக்குமாறும், திரவமட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக மூழ்கியுள்ளது.

4. ஓர் அரைவட்டம், அதன் எல்லை விட்டம் திரவமட்டத்திலிருக்குமாறு திரவத்திலாழ்ந்துள்ளது.

5. ஒரு நீள்வட்டம் அதன் நெட்டச்சு செங்குத்தான நிலையிலும், ஓர் உச்சி திரவமட்டத்திலுமிருக்க மூழ்கியுள்ளது.

6. ஒரு சரிவகம் (Trapezium) அதன் இணையான பக்கங்களி லொன்று திரவமட்டத்திலுள்ளவாறு ஆழ்ந்துள்ளது.

7. செவ்வகலம் (latus rectum) திரவமட்டத்திலிருக்குமாறும், அதன்கீழுள்ள பரப்பு திரவத்திலாழ்ந்திருக்குமாறுமுள்ள ஒரு பரவளைவு.

8. அடிப்பக்கம் திரவமட்டத்திலிருக்குமாறு மூழ்கியுள்ள ஓர் உருள்வளை (cycloid).

§ 55. விசையும் வேலையும் (Force & Work)

ஒரு மாருத விசை F இயங்குவதால் அதன் இயங்குபுள்ளி விசையின் திசையில் s தூரம் செல்லுமாயின், செய்யப்பட்டவேலை $F \times s$ என்கிறோம். F ஆனது s-ன் ஒரு சார்பாயின் Δs தூரத் திற்கு இயங்கும்போது விசைசெய்யும் வேலை $\Delta w = F(s) \times \Delta s$ எனவாகும். s_1-தூரத்திலிருந்து s_2-வரை இயங்கும்போது செய்யும் வேலையின் கூடுதல் $\sum_{s_1}^{s_2} F(s) \Delta s$ என்று தொகைப்படுத்தி,

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds \text{ எனலாம்.}$$

குறிப்பு : தொகை காணுமுன் F-ஐ s-ன் சார்பாக்கவும்.

எ. கா. 1.

a நீளமுள்ள ஒரு மீள்சக்தியுடைய (elastic) கயிறு b நீளத்திலிருந்து c-யாக நீளும்போது செய்யப்படும் வேலையைக் கணக்கிடுக ($c > b > a$).

கயிற்றின் நீளம் x-ஆக உள்ளபோது அதன் இழுவிசை T எனவும் அதன் மீள்சக்திக் கெழு λ எனவுமிருந்தால் ஹூக்சு (Hookes law) விதிப்படி

$$T = \frac{\lambda\,(x - a)}{a}$$

b நீளத்திலிருந்து c-யாக நீளும்போது செய்யப்படும் வேலை

$$= \int_b^c T \cdot dx = \int_b^c \frac{\lambda\,(x - a)}{a} \cdot dx$$

$$= \frac{\lambda}{2a}\Big[(x - a)^2\Big]_b^c$$

$$= \frac{\lambda}{2a}\left[(c - a)^2 - (b - a)^2\right]$$

$$= \frac{\lambda}{2}\,(c - a + b - a)\,(c - a - b + a)$$

$$= \frac{\lambda}{2a}\,(c - b)\,(b + c - 2a)$$

$$= (c - b)\,\frac{\lambda}{2}\left[\frac{b - a}{a} + \frac{c - a}{a}\right]$$

= நீட்சி × (முதல், இறுதி இழு விசைகளின் சராசரி)

பயிற்சிகள் 43

1. ஒரு மீள்சக்தியுடைய கயிறு (Elastic string) தொடக்கத்தில் 6" நீளமும் 5 பவுண்ட் எடையுள்ள பளுவைத்தாங்கும் போது 20" நீளமும் உள்ளது. நீளுவதால் செய்யப்படும் வேலையை (work) மதிப்பிடுக.

2. ஒரு சுருள்கம்பி 1 அங்குலம் நீளம், 1 பவு, எடையின் ஈர்ப்புச் சக்தி வேண்டுமெனில், கம்பி இன்னும் 3 அங்குலம் நீளும் போது செய்யப்படும் வேலையைக் கணக்கிடுக.

3. இயல்பான நீளம் 10" உள்ள ஒரு மீள்சக்தியுடைய கயிறு (elastic string) 15" என நீள 5 பவு. எடையின் ஈர்ப்புச்சக்தி வேண்டியிருந்தால், 12" லிருந்து 15" ஆக நீளும்பொழுது எவ்வளவு வேலை செய்யப்படுகின்றது ?

4. தொடக்கப்பருமம் 200 கன அடியும் சதுர அங்குலத்திற்கு 15 பவு. எடை அழுத்தமுமுள்ள காற்றைச் சதுர அங்குலத்திற்கு

80 பவு. எடையிருக்குமாறு நெருக்கும்போது செய்யப்படும் வேலையின் மதிப்பை $PV = C$ (மாறிலி) என்ற விதியால் கணக்கிடுக.

எ. கா. 2.

p அழுத்தமும் v பருமமும் உள்ள ஒருவாயு ஓர் உருளைவடிவக் குழாயிலிலுள்ளது. மாருத வெப்பத்தில் அவ்வாயு x_0 நீளத்திலிருந்து x_1 நீளமாக விரிந்தால் நிகழ்ந்த வேலை $pv \log\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$ எனக் காட்டுக.

வெப்பநிலை மாருதபோது,

p அழுத்தத்தில் வாயுவின் பருமம் v என்போம்-பருமம் $\triangle v$ அதிகரித்தபோது செய்யப்பட்டவேலை, $\triangle w = p \cdot \triangle v$

$\therefore$ பருமம் v_0 விலிழிந்து v_1 ஆனபோது செய்யப்பட்டவேலை

$$w = \sum_{v_0}^{v_1} p \cdot dv = \int_{v_0}^{v_1} \cdot p \cdot dv$$

ஆனால் பாயில் (Boyle) விதிப்படி

$$pv = p_0 v_0 \qquad \therefore \quad p = \frac{p_0 v_0}{v}$$

$$\therefore \quad w = \int_{v_0}^{v_1} \frac{p_0 v_0}{v} \cdot dv = p_0 v_0 (\log v)_{v_0}^{v_1}$$

$$= p_0 v_0 \log\left(\frac{v_1}{v_0}\right)$$

குழாயின் குறுக்கு வெட்டின் பரப்பு மாறிலி, A என்றும், பருமம் v_0, v_1 எனும்போது குழாயில் வாயுவின் நீளம் முறையே x_0, x_1 என்றும் கொண்டால்,

$$v_0 = A \cdot x_0, \; v_1 = A \cdot x_1$$

$$\therefore \quad w = p_0 v_0 \log\left(\frac{A x_1}{A x_0}\right)$$

$$= p_0 v_0 \log\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

§ 56. தொடர் வட்டி விதி (Compound Interest)

ஆண்டுக்கு $r\%$ வீதம் மாதா மாதாம் அசலுடன் வட்டி சேர்ந்தால் ஆண்டு முடிவில் P என்ற அசல் $P\left(1+\frac{r}{12}\times\frac{1}{100}\right)^{12}$ என்று தொடர் வட்டித் தொகையாகும்.

கூடிய தொகை $A = P\left(1+\frac{r}{12}\times\frac{1}{100}\right)^{12}$

அது போலஆண்டில் n தவணைகளில் அசலுடன் வட்டி சேர்க்கப் படுமாஞல்,ஒரு ஆண்டிலாகும் தொடர் வட்டித் தொகை

$$A = P\left(1+\frac{r}{100\,n}\right)^{n}.$$

$\therefore$ t ஆண்டுகளில் ஆகும் தொகை

$$A = P\left(1+\frac{r}{100\,n}\right)^{nt}$$

$$= P\left\{\left(1+\frac{r}{100\,n}\right)^{\frac{100\,n}{r}}\right\}^{\frac{tr}{100}}.$$

தொடர்ச்சியாக ஒவ்வொரு கணமும் வட்டி அசலுடன் சேர்ந்தால்,

$$A = P \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left\{\left(1+\frac{r}{100\,n}\right)^{\frac{100\,n}{r}}\right\}^{\frac{tr}{100}}$$

$$= P\left\{\underset{\frac{100\,n}{r}\to\infty}{\text{எல்லை}}\left(1+\frac{r}{100\,n}\right)^{\frac{100n}{r}}\right\}^{\frac{tr}{100}}$$

$$= P\cdot e^{\frac{tr}{10\,n}}$$

$$\therefore\ \frac{dA}{dt} = \frac{r}{100}\cdot P\cdot e^{\frac{tr}{100}} = \frac{r}{100}\cdot A.$$

அதாவது, $\frac{dA}{dt} = KA$, $K =$ ஒரு மாறிலி $\frac{r}{100}$

அல்லது, $\frac{dy}{dt} = Ky.$ என்பது தொடர் வட்டி விதியாகும்.

குறிப்பு : இத்தொடர் வட்டி விதியையொட்டி ஏற்படும் விஞவுகளில் முக்கியமானவை :—

1. நியூடனின் வெப்பம் குறையும் விதி

$\frac{d\theta}{dt} = -K\theta$. இங்கு θ என்பது பொருளின் வெப்பநிலைக் கும் அதன் சுற்றுப்புற வெப்பநிலைக்குமுள்ள வேறுபாடாகும்.

2. கடல் மட்ட உயரத்தையொட்டி ஓர் இடத்தின் காற்றழுத்த வேறுபாடு

$$\frac{dp}{dh} = -Kp.$$

(h உயரத்தில் அழுத்தம் p ஆனல், $p = f(h)$. இங்கு K ஒரு மாறிலி).

பயிற்சிகள் 44

1. ரூ. 500-க்கு 6% வட்டி வீதம் 10 ஆண்டுகளில் (a) மாத மொரு முறை வட்டி அசலுடன் கூட்டப் பட்டால் (b) ஒவ்வொரு கணமும் (instant) 'கூட்டப்பட்டால் தொடர் வட்டித் தொகை காண்க.

2. ஆண்டு தோறும் ஒரு தொகை r% வீதம் வட்டி கூடி இரட்டிக்கும் காலம் $\left(\frac{100}{r} + \frac{1}{2}\right) \log^2$ ஆண்டுகள் அண்ணள வாக வென்று நிறுவுக.

3. காற்று வெளி மண்டலத்தின் (atmosphere) அடர்த்தி கடல் மட்டத்திலிருந்து ஏதாவதொரு உயரத்தில். D என்றும், காற்றின் அழுத்தம் p என்றும், அடர்த்தி அழுத்தத்திற்கு நேர் விகிதத்திலுள்ளதொன்றும் கொண்டு, z உயரத்தில் அழுத்தம் $p = p_0 \cdot e^{-\left(\frac{g D_0 z}{p_0}\right)}$ என்று காட்டுக. P_0, D_0 முறையே கடல் மட்ட அழுத்தமும் அடர்த்தியுமென்க.

4. 2 செ. மீ. ஆரையுள்ள, உலோகத்தாலான ஒரு கோளத்தின் பருமம் வெப்பத்தால் விரிவடைகின்றது. உலோ கத்தின் நீள விரிவுக்கெழு (Co-efficient of linear expansion) 0·00002 எனக்கொண்டு வெப்பநிலை $0°C$-யிலிருந்து $20°C$-க்கு உயரும்போது கோளப் பரும விரிவைக் காண்க.

5. 20 ஆண்டுகள் வளரும் ஒரு மரம் ஓர் ஆண்டின் உயரத்தைப்போல் 1·02 மடங்கு அடுத்த ஆண்டில் வளரும். 3 ஆண்டுகளின் முடிவில் உயரம் 3 அடி என்ருல் 15 ஆண்டு களின் முடிவில் மரத்தின் உயரமென்ன ?

15. தகாத் தொகையீடுகள் ஒருங்குதல் (Convergence of Improper Integrals)

பாகம் II பகுதி IX-ல் தகாத் தொகையீடுகள் எப்போது முடிவுள்ள மதிப்புகளைப் பெறும் அல்லது மதிப்பற்று விடுமெனக் கண்டோம். இங்குச் சற்று விரிவாக அவற்றைக் காண்போம்.

§ 57. தொகையிடும் வெளி, முடிவிலியாதல் (Infinite region of Integration)

(*a*) $x > a$ என்ற எல்லா எண்களுக்கும் $f(x)$ மிகை மதிப்புள்ள, தொடர்ச்சியான சார்பு என்ற கொள்கையில் மேல் எல்லை (வரம்பு) முடிவிலியை நாடும்போது

$$\int_a^{\infty} f(x) \cdot dx\text{-ஐ}$$

$$\underset{\zeta \to \infty}{\text{எல்லை}} \int_a^{\zeta} f(x)\, dx \text{ எனக்குறிக்கலாம்.}$$

$F'(x) = f(x)$ எனில்

$$\underset{\zeta \to \infty}{\text{எல்லை}} = \int_a^{\zeta} f(x) \cdot dx = F(\zeta) - F(a) = \phi(\zeta)$$

என்போம்.

$\phi(\zeta)$, ζ-ன் மிகை மதிப்புள்ள, தொடர்ச்சியான ஒரு சார்பு. வடிவ கணித விளக்கப்படி இது $(a, \S)$ எல்லைகளுக்குள்ளடங்கிய ஒரு பரப்பைக் குறிக்கிறது. ஆதலால் $\zeta > a$ என மதிப்புகள் ஏற்கும்போது $\phi(\zeta)$ ஓர் ஏறும் சார்பாகும்.

எனவே $\lim_{\zeta \to \infty} \phi(\zeta) \leq k$ என முடிவுள்ள மதிப்பை நெருங்கினால்,

$\int_a^{\infty} f(x) \cdot dx$ என்ற தகாத் தொகை, ஒருங்கி K என்ற மதிப்புள்ள வரையறைத் தொகையாகும். அஃதின்றி, $\lim_{\zeta \to \infty} \phi\ \infty$ என்றால் தகாத் தொகை மதிப்பற்றுவிடும்.

(*b*) கீழ் எல்லை (வரம்பு) முடிவிலியை நாடும்போது

$\zeta' > 0$ எனில், $\int_{-\infty}^{a} f(x) \cdot dx$-ஐ

$\lim_{\zeta' \to \infty} \int_{-\zeta'}^{a} f(x)\, dx = \phi(\zeta')$ எனலாம்.

$\phi(\zeta) \leq k$ எனில் தகாத்தொகை $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ ஒருங்கி k என்ற மதிப்பைப் பெறும்.

$\phi(\zeta) \to \infty$ எனில் மதிப்பில்லை.

(*c*) இரு எல்லைகளும் (வரம்புகளும்) முடிவிலியை நாடினால் தகாத்தொகை $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ ஐ

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x) \cdot dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$= \lim_{\zeta' \to \infty} \int_{-\zeta'}^{a} f(x)\, dx + \lim_{\zeta \to \infty} \int_{a}^{\zeta} f(x)\, dx$$

எனலாம்.

இங்கு ζ, ζ' ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவை எனக்கொண்டு வலது புறமுள்ள தொகையீடுகளின் முடிவுள்ள மதிப்புகள் முறையே l', l என்றால் தகாத்தொகையீடு ஒருங்கும்.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = l' + l$$ என்பது தொகையீட்டின் மதிப்பு.

முடிவிலி வரம்புகள் தனித்திராமல் தொடர்ந்திருந்தால்

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \underset{\zeta \to 0}{\text{எல்லை}} \int_{-\zeta}^{+\zeta} f(x) \cdot dx$$

$= \phi(\zeta) \leq k$ என்று முடிவுள்ள எல்லையை நெருங்கினால், தகாத்தொகை ஒருங்கி தொகையீட்டின் மதிப்பு k எனவாகும். இதுவே, முதன் மதிப்பு (Principal Value of the Integral) எனப்படும். இதனை $K \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx$ என எழுதுகிறோம்.

குறிப்பு : (1) வரம்புகள் முடிவிலியாயுள்ள ஒரு தகாத்தொகை ஒருங்குவதற்குத் (converge) தேவையான கட்டுப்பாடு, $\zeta > a$ என்ற எல்லா அளவுகளிலும் $\zeta \to \infty$ என ஆகும்போது $(a, \zeta,)$ வரம்புகளில் வரும் தொகையீடான $\phi(\S) \leq k$, என்ற ஒரு முடிவுள்ள மேல் எல்லை மதிப்புள்ளது என்பதாகும்.

2. $\phi(\zeta)$ ஒரு முடிவிலியானால், **தகாத்தொகை** மதிப்பற்றதாகும் (Diverges).

3. $\phi(\zeta)$ **ஓர் எல்லையை அடையாமலும், முடிவிலியாகாமலுமிருந்தால், தகாத்தொகை அலைகின்றது** (oscillates) **என்கிறோம்.**

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

$(1, \zeta)$ வரம்புகளில் $\frac{1}{x^2}$ மிகை மதிப்புள்ளதாகவும் தொடர்ச்சி யாகவும் உள்ளது.

$$\phi(\zeta) = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^{\zeta} = -\frac{1}{\zeta} + 1$$

$$\underset{\zeta \to \infty}{\text{எல்லை}} \ \phi(\zeta) = 1$$

$\therefore$ தகாத்தொகை $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ ஒருங்குகிறது.

அதன் மதிப்பு $= 1$

2. $\int_{-\infty}^{2} e^{x} \cdot dx.$

இங்கு $\phi(\zeta') = [e^x]_{-\zeta'}^{2}$

$$= e^2 - e^{-\zeta'} = e^2 - \frac{1}{e^{\zeta'}}$$

$\therefore$ $\underset{\zeta' \to \infty}{\text{எல்லை}} \ \phi(\zeta') = e^2$

$\therefore$ தகாத்தொகை ஒருங்கி e^2 என்ற மதிப்பைப் பெறுகிறது.

3. $\int_1^{\infty} \sin x \cdot dx$

இங்கு $\phi(\zeta) = \underset{\zeta \to \infty}{\text{எல்லை}} \int_1^{\zeta} \sin x \cdot dx = \underset{\zeta \to \infty}{\text{எல்லை}} (-\cos x)_1^{\zeta}$

$$= \underset{\zeta \to \infty}{\text{எல்லை}} (-\cos \zeta + \cos 1^c)$$

$\therefore$ $|\phi(\zeta)| = \underset{\zeta \to \infty}{\text{எல்லை}} |-\cos \zeta + \cos 1^c|$

$$\leq |\cos \zeta| + |\cos 1^c|$$

$\zeta \to \infty$ என $\cos \zeta$ ன் மதிப்பைச் சொல்ல வியலாது. $-1, +1$ எல்லைகளுக்கிடையில் எதுவாயினுமிருக்கலாம்.

$\therefore$ தகாத் தொகை மதிப்பற்றது எனலாம்; அல்லது $(-1 + \cos 1^c)$, $(1 + \cos 1^c)$ என்ற எல்லைகளுக்கிடையில் அலைகிறது எனலாம்.

4. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

இங்கு $\phi(\zeta) = (\log x)_1^\zeta = \log \zeta$

எல்லை $\phi(\zeta) = \infty$
$\zeta \to \infty$

$\therefore$ தகாத் தொகை மதிப்பற்றது.

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = I$ என்க.

$$\text{இங்கு } I = \underset{\zeta' \to \infty}{\text{எல்லை}} \int_{-\zeta'}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \underset{\zeta' \to \infty}{\text{எல்லை}} \int_0^\zeta \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \text{எல்லை} \left[\tan^{-1} x\right]_{-\zeta}^{0} + \text{எல்லை} \left[\tan^{-1} x\right]_0^\zeta$$

$$= 0 - \tan^{-1}(-\infty) + \tan^{-1}(\infty) - 0$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \quad \therefore \text{ இத்தொகை ஒருங்குகிறது.}$$

§ 58. தொகுபடும் சார்புகள் முடிவிலியாதல் (Infinite Integrand)

(i) $f(b) \to \infty$

$(a, b-h)$ இடைவெளியில் $f(x)$ தொடர்ச்சியுள்ளது என்று கொள்வோம்.

$x \to b$ எனும் போது $h \to 0, f'(x) \to \infty$ இப்போது

தகாத்தொகை $\int_a^b f(x)\,dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \int_a^{b-h} f(x)\,dx.$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} [F(b-h) - F(a)]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \phi(h) \text{ என்போம்.}$$

$h \to 0$ எனும்போது $\phi(h)$ ஒரு முடிவுள்ள எல்லை, K-யை நாடினால், தகாத்தொகை b-யில் ஒருங்குகிறது என்கிறோம்.

$f(x)$ ஆனது (a, b) இடைவெளியில் மிகை மதிப்புள்ளதெனில், h குறையும்போது, $\phi(h)$ ஓர் ஏறும் சார்பாகும்.

$\therefore \int_a^b f(x) \cdot dx$ ஒருங்குவதற்குத் **தேவையான கட்டுப்பாடு, h-ன் எல்லா மிகைமதிப்புகளுக்கும் $\phi(h)$ சார்புக்கு ஒரு மேல் எல்லை k $(\phi(h) < k)$, என இருக்கவேண்டுமென்பதே.**

(ii) $f(a) \to \infty$

இங்கு, $(a+h, b)$ இடைவெளியில் $f(x)$ தொடர்ச்சியுள்ளது என்று கொள்வோம்.

$x \to a$ எனும்போது, $h \to 0$ $f(x) \to \infty$

தகாத்தொகை $\int_a^b f(x)\,dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \int_{a+h}^b f(x)\,dx$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} [F(b) - F(a+h)]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \phi(h)$$

மேற்சொன்னவாறே, h-ன் எல்லா மிகை மதிப்புகளுக்கும் $\phi(h) < k$ என ஒரு மேல் எல்லை k இருக்குமாயின், தகாத்தொகை ஒருங்குவதாகும்.

(iii) $a < c < b$ எனும்போது, $x = c$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றுப்போனால் அதாவது $f(c) \to \infty$ ஆனால்,

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$$ எனப்பிரித்து,

(i), (ii)-ல் கண்ட கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டு தகாத்தொகை ஒருங்குவதைக் கண்டறியலாம்.

எ. கா. 1.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$[0, 1 - h]$ இடைவெளியில் $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ மிகையாகவும்,

தொடர்ச்சியாகவும் உளது. $f(1) = \infty$

இங்கு $\phi(h) = [\sin^{-1} x]_0^{1-h}$

$= \sin^{-1}(1 - h) - \sin^{-1}(0)$

$\therefore$ எல்லை $_{h \to 0} \phi(h) = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx$, $\frac{\pi}{2}$ என்ற மதிப்புக்கு ஒருங்குகிறது.

எ. கா. 2.

$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, y அச்சு, $x = 1$ என்ற குத்தாயம் இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு முடிவுள்ளதா என்று பார்க்கவும்.

பரப்பு $= \int_0^1 y \cdot dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx$

$x = 0$ எனும் புள்ளியில் $\frac{1}{\sqrt{x}}$ முடிவிலியாகிறது.

இங்கு $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \int_h^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx$

$$\phi(h) = \left(2\sqrt{x}\right)_h^1 = 2 - 2\sqrt{h}$$

$\therefore \quad \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \; \phi(h) = 2 =$ பரப்பு

$\therefore$ வேண்டிய பரப்பு முடிவுள்ளது.

எ. கா. 3.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$x = 2$ என, $f(x)$ தொடர்ச்சியற்று முடிவிலியாகிறது.

$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$ எனப்பிரிப்போம்.

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \int_0^{2-h} \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$\phi(h) = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \left[-\frac{1}{x-2} \right]_0^{2-h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \left[+\frac{1}{h} - \frac{1}{2} \right] = \infty$$

$\therefore$ மதிப்பு எல்லையற்று விரிகின்றது.

பயிற்சிகள் 45

கீழ்க்காணும் தகாத் தொகையீடுகளின் மதிப்புகளை, உண்டெனில் காண்க.

1. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$

2. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

3. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{(4-x)^{\frac{2}{3}}}$

4. $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{dx}{(x-4)^{3}}$

5. $\displaystyle\int_{1} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$

6. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x}\, dx$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} \cdot dx$

8. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{x \cdot dx}{(x^2-8)^{\frac{2}{3}}}$

9. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}}$

10. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x} \cdot \cos x \cdot dx$

§ 59. ஒருங்குதல் காண ஒப்புமைச் சோதனைகள் (Comparison tests for convergence)

(i) முடிவிலா வெளியில் ஒருங்குதல் (Convergence at Infinity).

தேற்றம் :

$f(x)$, $g(x)$ என்ற இரு சார்புகள் $x \geq a$ என்ற எல்லா எண்களுக்கும், மிகை மதிப்புகள் கொண்டபோது

$$\underset{x \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \; (l \neq 0 \text{ அல்லது } \infty) \text{ என்றிருந்தால்}$$

தொகையீடுகள் $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ஒன்றுபோல் ஒருங்கும் அல்லது ஒருங்கா.

நிறுவுதல் : கொள்கைப்படி x-ன் மதிப்பு a-க்கு மேல் அதிகரிக்கும்போது, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \sim l$ என்ற வேற்றுமை படிப்படியாகக் குறைந்து $x \to \infty$ ஆக வேற்றுமை $\to 0$ எனவாகும். இவ் வேற்றுமை ϵ என்ற ஒரு மிகை எண்ணைவிடச் சிறியதாக வேண்டு மெனின், அதற்கேற்ற X_0 என்ற x-ன் மதிப்பைக் காணக்கூடும். x-ன் மதிப்பு X_0-ஐயும் எட்டிச் செல்லும்போது, வேற்றுமை ϵ-யை விட இன்னும் குறையும்.

இதைச் சுருக்கமாக எழுதுவோம்.

ϵ ஏதாமொரு மிகை எண். அதற்கேற்ப $x \geq X_0$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| > \epsilon \qquad \ldots\text{(i)}$$

என்றிருக்குமாறு X_0 என்ற எண்ணைக் காணக்கூடும். சமமின்மை (i)-ஐ, $x \geq X_0$ எனும்போது

$$\frac{f(x)}{g(x)} - l < \epsilon,\; l - \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < (l+\epsilon),\quad (l-\epsilon) < \frac{f(x)}{g(x)}$$

அல்லது, $(l-\epsilon)\, g(x) < f(x) < (l+\epsilon)\, g(x)$ எனலாம்.

X_0, X வரம்புகளில் x-ஐ ஒட்டித் தொகையிட

$$\int_{X_0}^{X} (l-\epsilon)\cdot g(x)\cdot dx \leq \int_{X_0}^{X} f(x)\,dx$$

$$\leq \int_{X_0}^{X} (l+\epsilon)\, g(x)\,dx$$

(a) இப்போது $\int_a^\infty g(x)\,dx$, ஒருங்குமெனக் கொள்வோம்.

அதன் பகுதிகளான $\int_{X_0}^{\infty} g(x)\, dx$, $\int_{X_0}^{X} g(x) \cdot dx$-ம் ஒருங்கும்.

$\therefore \quad (l + \epsilon) \int_{X_0}^{X} g(x) \cdot dx$ ஒரு மேல் எல்லை கொண்டதாகும்.

ஆனால் $\int_{X_0}^{X} f(x)\, dx \leq (l + \epsilon) \int_{X_0}^{X} g(x)\, dx$ எனக் கண்டோம்.

$\therefore \quad \int_{X_0}^{X} f(x)\, dx$-ம் மேல் எல்லை கொண்டதாகும்.

$\therefore \quad \int_{X_0}^{\infty} f(x)\, dx$ ஒருங்கும். இங்கு X_0 ஒரு குறிப்பிட்ட எண்.

$\therefore \quad \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ ஒரு முடிவான எல்லைக்கு ஒருங்கும்.

(b) $\int_{a}^{\infty} g(x)\, dx$ ஒருங்காதெனில்

$\int_{X_0}^{X} g(x)\, dx$, $(l - \epsilon) \int_{X_0}^{X} g(x)\, dx$ எல்லையற்றவையாகும்.

ஆனால் $(l - \epsilon) \int_{X_0}^{X} g(x)\, dx \leq \int_{X_0}^{X} f(x)\, dx$

$\therefore \quad \int_{X_0}^{X} f(x)\, dx$ எல்லையற்றது.

அதாவது $\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ மதிப்பற்றதாகும்.

(ii) தொகுபடும் சார்பு முடிவிலியாகுமிடத்து அதன் தொகையீடு ஒருங்குதல்.

தேற்றம் : $f(x)$, $g(x)$ என்ற சார்புகள் (a, b) இடைவெளியில் மிகையாகவும், தொடர்ச்சியாகவுமிருந்து $x \to b$ எனும்போது முடிவிலிகளாகின்றன என்போம்.

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \quad (l \neq 0 \text{ அல்லது } \infty)$$ என்றால் தகாத்

தொகைகள் $\int_a^b f(x)\, dx$, $\int_a^b g(x)\, dx$ ஒன்றுபோல் ஒருங்கும்

அல்லது ஒருங்கா.

நிருவுதல் : ζ-ஏதாமொரு முழு எண். அதற்கேற்ப $b > x \geq X_0 > a$ என்ற எல்லையில் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| > \epsilon \ldots \qquad \ldots \text{(i)}$$

என்றிருக்குமாறு X_0 என்ற ஓர் எண்ணைக் குறிக்கலாம்.

சமமின்மை (i)-ஐ

$(l - \epsilon)\, g(x) < f(x) < (l + \epsilon)\, g(x)$ என எழுதலாம். X_0, X வரம்புகளில் x-ஐ ஒட்டித் தொகையிட

$$(l - \epsilon) \int_{X_0}^{X} g(x) \cdot dx \leq \int_{X_0}^{X} f(x)\, dx$$

$$\leq (l + \epsilon) \int_{X_0}^{X} g(x) \cdot dx$$ எனவாகும்.

இப்போது,

(a) $\int_a^b g(x)\, dx$, b-யில் ஒருங்குவதெனக் கொள்வோம்.

22

அதன் பகுதிகளான $\int_{X_0}^{b} g(x)\,dx$, $\int_{X_0}^{X} g(x)\,dx$-ம் ஒருங்கும்.

அதாவது $(l+\epsilon)\int_{X_0}^{X} g(x)\,dx$-க்கு ஒரு மேல் எல்லை உண்டு.

$$\therefore \int_{X_0}^{X} f(x)\,dx, \quad b\text{-யில் ஒருங்கும்.}$$

அதனால் $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$-ம் b-யில் ஒருங்கும்.

(b) $\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ ஒருங்குவதில்லையெனில்

$\int_{a}^{b} f(x)dx$-ம் ஒருங்காது என எளிதாகக்காட்டலாம்.

குறிப்பு : இதுபோலவே, தொகுபடும் சார்பு a-யில் முடிவிலியானால் தகாத்தொகை a-யில் ஒருங்க ஒரு சோதனைத்தேற்றத்தைக் கூறி அதை நிறுவலாம்.

§ 60. ஒப்புமைத் தொகையீடுகள்—(μ சோதனை)

தொகை காணும் முடிவிலா வெளியிலோ (Infinite region of integration) அல்லது தொகுபடும் சார்பு முடிவிலியாகும் வரம்புகளிலோ, தகாத்தொகையீடுகள் ஒருங்குகின்றனவா, இல்லையா என்று ஒப்பிட்டு அறியப் பயன்படும் மூன்று தொகையிடுகளை இங்குக் காண்போம். ஒப்பிடும் தொகையீடுகளாவன :

(i) $\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^{\mu}}\,dx \; (a>0)$ — (வரம்பு ஒரு முடிவிலியாதல்),

(ii) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\mu}}$ — (மேல் வரம்பில் தொகுபடு சார்பு முடிவிலியாதல்.)

(iii) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$ (கீழ் வரம்பில் தொகுபடு சார்பு முடிவிலியாதல்

(i) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}$ என்ற **தகாத்தொகை $\mu > 1$ எனும் போது ஒருங்கும்.**

$\mu \leq 1$ எனும் போது விரியும்.

தகாத் தொகை $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}$ — இங்கு மேல் வரம்பு முடிவிலி.

$\mu \neq 1$ எனில் $\phi(\zeta) = \int_a^{\zeta} \frac{dx}{x^{\mu}} = \frac{1}{-\mu+1}\left[x^{-\mu+1}\right]_a^{\zeta}$

$$= \frac{1}{-\mu+1}\left[\frac{1}{\zeta^{\mu-1}} - \frac{1}{a^{\mu-1}}\right]$$

1. $\mu > 1$ எனில்,

$\therefore \lim_{\zeta \to \infty} \phi(\zeta) = \frac{1}{\mu-1} \times \frac{1}{a^{\mu-1}}$

= ஒரு முடிவுள்ள **மதிப்பு.**

$\therefore\ \mu > 1$ எனில், $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}$ ஒருங்கும்.

2. $\mu < 1$ எனில்,

$$\underset{\zeta \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{\zeta^{\mu - 1}} = \underset{\zeta \to \infty}{\text{எல்லை}} \zeta^{1 - \mu} = \infty$$

$$\therefore \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}} \text{ விரியும்.}$$

3. $\mu = 1$ எனில்,

$$\phi(\zeta) = \int_a^{\zeta} \frac{dx}{x} = (\log x)_a^{\zeta}$$

$$= \log \zeta - \log a$$

$$\therefore \underset{\zeta \to \infty}{\text{எல்லை}} \phi(\zeta) = \infty \quad \therefore \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}} \text{ விரியும்.}$$

முடிவு :

$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}$ என்ற தகாத் தொகை

$\mu > 1$ எனில் ஒருங்கும்.

$\mu \leq 1$ எனில் விரியும்.

(ii) $\int_a^{b} \frac{dx}{(b - x)^{\mu}}$ **என்ற தகாத்தொகை** $\mu < 1$ **எனில், ஒருங்கும் ;** $\mu \geq 1$ **எனில் விரியும்**

$x \to b$ எனில் $\dfrac{1}{(b-x)^{\mu}} \to \infty$

$\mu \neq 1$ எனில் $\phi(\zeta) = \displaystyle\int_a^{b-\zeta} \frac{dx}{(b-x)^{\mu}}$

$$= \frac{1}{-\mu+1}\left[\frac{1}{(b-x)^{\mu-1}}\right]_a^{b-\zeta}$$

$$= \frac{1}{-\mu+1}\left[\frac{1}{\zeta^{\mu-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\mu-1}}\right]$$

(1) $\mu < 1$ எனில்,

$$\underset{\S \to 0}{\text{எல்லை}} \phi(\S) = \underset{\S \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{-\mu+1}\left[\zeta^{1-\mu} - \frac{1}{(b-a)^{\mu-1}}\right]$$

$$= \frac{-(b-a)^{1-\mu}}{(1-\mu)}$$, முடிவுள்ள மதிப்பு.

$\therefore \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\mu}}$ ஒருங்கும்.

(2) $\mu > 1$ எனில், $\underset{\S \to 0}{\text{எல்லை}} \phi(\S) = \underset{\S \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{1}{-\mu+1}$

$$\left[\frac{1}{\S^{\mu-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\mu-1}}\right]$$

$= \infty$ (முடிவிலி)

$\therefore \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\mu}}$ விரியும்.

(3) $\mu = 1$ எனில் $\phi(\zeta) = \int_a^{b-\zeta} \frac{dx}{(b-x)}$

$$= [-\log(b-x)]_a^{b-\zeta}$$

$$= -\log\zeta + \log(b-a)$$

∴ எல்லை

$\zeta \to 0$ ϕ (§) முடிவிலி.

∴ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)}$ விரியும்.

முடிவு.

$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\mu}}$ என்ற தாகத்தொகை

$\mu <$ | எனில் ஒருங்கும். $< \geq$ | எனில் விரியும்.

(iii) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$ என்ற தகாத்தொகை $\mu < 1$ எனில் ஒருங்கும். $\mu \geq 1$ எனில் விரியும்.

$\mu \neq 1$ எனில் $\phi(\zeta) = \int_{a+\zeta}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$

$$= \frac{1}{-\mu+1}\left[\frac{1}{(x-a)}^{\mu-1}\right]_{a+\zeta}^{b}$$

$$= \frac{1}{-\mu+1}\left[\frac{1}{(b-a)}^{\mu-1} - \frac{1}{\zeta^{\mu-1}}\right]$$

1. $\mu < 1$ எனில் $\lim_{\zeta \to 0} \phi(\zeta) = \frac{(b-a)^{1-\mu}}{-\mu+1} - \lim_{\zeta \to 0} \frac{\zeta^{1-\mu}}{-\mu+1}$

$$= \frac{(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu},$$ முடிவுள்ள மதிப்பு.

2. $\mu > 1$ எனில், $\lim_{\zeta \to 0} \phi(\zeta)$ முடிவிலி.

3. $\mu = 1$ எனில், $\phi(\zeta) = \int_{a+\zeta}^{b} \frac{dx}{x-a}$

$$= [\log(x-a)]_{a+\zeta}^{b}$$
$$= [\log(b-a) + \log\zeta]$$
= முடிவிலி.

முடிவு ;

$\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$ என்ற தகாத்தொகை

$\mu < 1$ எனில் ஒருங்கும். $\mu \geq$ எனில் விரியும்.

எ. கா. 1.

$\int_{1}^{\infty} \frac{x \cdot dx}{(1+x)^3}$ என்ற தகாத்தொகை ஒருங்குவதைச் சோதனை செய்க.

$1 - \infty$ எல்லைக்குள் $\frac{x}{(1+x)^3}$ மிகையாகவும் தொடர்ச்சியாகவு முள்ளது.

$x \to \infty$ எனும்போது $f(x) \to 0$

$$\therefore \text{ ஒப்புமைத் தொகையீடு } \int_1^\infty \frac{dx}{x^\mu}$$

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^3} = \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}$$

$$\therefore\ g(x) = \frac{1}{x^2}\ .\quad \mu = 2$$

$$\text{இப்போது } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^3} \times \frac{x^2}{1}$$

$$= 1 \quad (\neq 0 \text{ அல்லது } \infty);$$

ஆனல் $\mu = 2 > 1$

$$\therefore \text{ முடிவிலியில் } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \text{ ஒருங்கும்.}$$

$$\text{அதனல் } \int_1^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^3} \text{-ம் ஒருங்கும்.}$$

எ. கா. 2.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{2}}} \text{ ஒருங்குகிறதா என்று சோதித்திடுக.}$$

$1 - \infty$ எல்லைக்குள் $f(x)$ மிகையாகவும் தொடர்ச்சியாகவும் இருக்கிறது. $x \to \infty$ எனும்போது $f(x) \to 0$.

$$\therefore \text{ ஒப்புமைத் தொகையீடு } \int_1^\infty \frac{dx}{x^\mu}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \quad g(x) = \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}}, \text{ இங்கு } \mu = \frac{5}{6}$$

$$\underset{x \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{x^{\frac{5}{6}}}{1} = 1$$

ஆனல் $\mu = \frac{5}{6} < 1$

$\therefore$ முடிவிலியில் $\int_1^\infty g(x)\,dx$ ஒருங்குவதில்லை.

அதனால் $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$ -ம் முடிவிலியில் ஒருங்குவதில்லை

எ. கா. 3.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$ என்பதன் ஒருங்குதலைச் சோதித்திடுக.

0 — 1 எல்லைக்குள் $f(x)$ மிகையானது, தொடர்ச்சியானது. ஆனல் $x \to 0$ எனும்போது கீழ் எல்லையில் $f(x) \to \infty$

$\therefore$ ஒப்புமைத் தொகையீடு $\int_0^1 \frac{dx}{(x-a)^\mu}$

$$f(x) = \frac{1}{(x-0)^{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}$$ இங்கு $\mu = \frac{1}{3}$

$$\text{எல்லை}_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{எல்லை}_{x \to 0} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1} = 1$$

ஆனால் $\mu = \frac{1}{3} < 1$

$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$ கீழ் எல்லை 0-ல் ஒருங்குகிறது.

$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$-ம் 0-ல் ஒருங்குகிறது.

எ. கா. 4.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 (1+x)^2}$ என்பதன் ஒருங்குதலைச் சோதித்திடுக.

$O - 1$ எல்லைக்குள் $f(x)$ மிகையானது; தொடர்ச்சியானது. கீழ் எல்லை $x \to 0$-ல் $f(x) \to \infty$

$\therefore$ ஒப்புமைத் தொகையீடு $\int_0^1 \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$

இங்கு, $f(x) = \frac{1}{x^2(1+x)^2}$

$$= \frac{1}{(x-0)^2(1+x)^2}$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{(x-0)^2}, \quad \mu = 2$$

$$\text{எல்லை}_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{எல்லை}_{x \to 0} \frac{1}{x^2(1+x)^2} \cdot \frac{x^2}{1} = 1$$

ஆனல் $\mu = 2 > 1$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$, $x = 0$ வில் ஒருங்குவதில்லை.

ஆதலால் $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 (1+x)^2}$ -ம் $x = 0$ வில் ஒருங்காது.

எ. கா. 5.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{3}}}$$ என்பதன் ஒருங்குதலைச் சோதித்திடுக.

$\frac{1}{2} - 1$ எல்லைக்குள் $f(x)$ மிகையாகவும், தொடர்ச்சியாகவும் உளது. மேல் எல்லை $x \to 1$-ல் $(fx) \to \infty$.

$\therefore$ ஒப்புமைத் தொகையீடு $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}$, $\mu = \frac{1}{3}$

$$\text{எல்லை}_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{எல்லை}_{x \to 1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{3}}} \times \frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{1} = 1$$

இங்கு $\mu = \frac{1}{3} < 1$

$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}$$ மேல் எல்லையில் ஒருங்குகிறது.

அதுபோலவே $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d}{x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{3}}}$ -ம் மேல் எல்லையில் ஒருங்கும்.

§ 61. அறவொருங்கல் (Absolute convergence)

ஒரு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் $f(x)$, $|f(x)|$ இவற்றின் தொகையீடுகள் ஒருங்குவனவாயின், $f(x)$-ன் தொகையீடு அந்த இடைவெளியில் அறவொருங்குகின்றது என்கிறோம். (Converges absolutely).

தொகையீடென்பது ஒரு தொடரின் கூட்டுத் தொகையின் எல்லை என்ற வரையறைப்படி (by definition)

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx \text{ ஒருங்குகின்றதெனில்}$$

$$\int_a^\infty f(x)\, dx\text{-ம் ஒருங்குமென்பது தொடர்களின் அற}$$

வொருங்கல் விதிப்படித் தெளிவாகும்.

எ. கா. 6.

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx \text{ இதன் ஒருங்குதலைச் சோதித்திடுக.}$$

$(1 - \infty)$ என்ற இடைவெளிக்குள் $\left|\dfrac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\right|$ மிகையாகவும் தொடர்ச்சியாகவும் உள்ளது. $x \to \infty$ எனும்போது $f(x) \to 0$ என ∞-ல் தொடர்ச்சியற்றுப் போகிறது.

$$f(x) = \left|\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\right|, \quad g(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{\left|\dfrac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\right|}{\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right.$$

$= \leq 1$, ($1 = \infty$ இடைவெளியில் $\neq 0$)

இங்கு $\mu = \frac{3}{2} > 1$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx \text{ ஒருங்குவதால்}$$

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \right| dx, \text{ ஆதலால்} \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

ஒருங்கும்.

எ. கா. 7.

$$\int_1^\infty \frac{x^n}{1 + x^n}\, dx \text{ இதன் ஒருங்குதலைச் சோதித்திடுக.}$$

$1 - \infty$ இடைவெளியில் $f(x)$ மிகையானது, தொடர்ச்சியானது. $n > m$ எனும்போது

$x \to \infty$ எனில் $f(x) \to 0$.

$$f(x) = \frac{x^m}{1 + x^n} = \frac{x^m}{x^n\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)} = \frac{1}{x^{n-m}\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}$$

$\therefore$ ஒப்புமைத் தொகையீடு

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{n-m}} \cdot dx, \quad \mu = n - m.$$

$$g(x) = \frac{1}{x^{n-m}}$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{n-m}\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)} \times \frac{x^{n-m}}{1}$$

$$= 1.$$

$\because \quad n - m > 1$ என்றபோது

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{n-m}}\, dx \text{ ஒருங்கும்.}$$

$$\text{அதுபோலவே } \int_1^\infty \frac{x^m}{1 + x^n}\, dx\text{-ம் ஒருங்கும்.}$$

எ. கா. 8.

$$\int_1^\infty \frac{(x^2+1)(3x+5)}{(x+2)^k}\, dx \text{ என்பதன் ஒருங்குதலைச்}$$

சோதித்திடுக.

$1 - \infty$ இடைவெளியில் $f(x)$ மிகை, தொடர்ச்சியானது.

$k - 3 > 0$ எனும்போது, $x \to \infty$ என $f(x) \to 0$

$$f(x) = \frac{(x^2+1)(3x+5)}{(x+2)} = x^3 \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(3 + \frac{5}{x}\right)}{x^k\left(1 + \frac{2}{x}\right)^k}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(3 + \frac{5}{x}\right)}{x^{k-3}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^k}$$

$\therefore \quad g(x) = \frac{1}{x^{k-3}}$ இங்கு $\mu = k - 3$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(3 + \frac{5}{x}\right)}{x^{k-3}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^k} \cdot \frac{x^{k-3}}{1} = 3$$

(எல்லை = $\lim$)

$\therefore \quad k - 3 > 1$ அதாவது $k > 4$ எனும்போது

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{k-3}}\, dx$$ ஒருங்குகிறது. அதுபோலவே

∴ $k > 4$ எனில் $$\int_1^\infty \frac{(x^2+1)(3x+5)}{(x+2)^k}\, dx$$-ம் ஒருங்கும்.

எ. கா. 9.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+ax^3}}$$ இதன் ஒருங்குதலைச் சோதித்திடுக.

$1 - \infty$ இடைவெளியில் $f(x)$ மிகையானது, தொடர்ச்சியுள்ளது. $x \to \infty$ என $f(x) \to 0$

இங்கு $$f(x) = \frac{1}{(x+ax^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\left(a+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\therefore \quad g(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\ \mu = \frac{3}{2}$$

$$\underset{x\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\left(a+\frac{1}{x^2}\right)} \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1}$$

$$= \frac{1}{a}\ (\neq 0 \text{ அல்லது } \infty)$$

இங்கு $\mu = \frac{3}{2} > 1$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot dx$$ ஒருங்கும். அதுபோலவே.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+ax^3}}$$ ம் ஒருங்கும்.

பயிற்சிகள் 45

கீழ்க்கண்ட தொகையீடுகள் ஒருங்குகின்றனவா வெனச் சோதனை செய்திடுக.

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\cdot dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\cdot dx$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{[(x-1)^6(x-2)]^{\frac{1}{5}}}$

5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\cdot dx}{(1+x)^3}$

6. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\sin x\cdot dx}{x^2}$

7. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{(x^5+3)}\,dx$

9. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^3\cdot dx}{(a^3+x^3)^2}$

10. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\cdot dx}{(ax+b)}$

11. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\cdot dx$

12. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x\,(\log x)^{p+1}}$

16. பீட்டா, காமா சார்புகள்

(Beta and Gamma Functions)

§ **62.** $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\cdot dx$, $\int_0^\infty x^{n-1}\cdot e^{-x}\cdot dx$ ஆயிலரின் தொகையீடுகள் (Eulerian Integrals) எனப்படுவன. இவற்றை முறையே $\beta(m, n)$ $\Gamma(n)$ எனக்குறித்து பீட்டா, காமா சார்புகள் என அழைக்கிறோம்.

§ **63. பீட்டா சார்பு** (Beta Function)

$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\cdot dx$ என்பது ஒரு m, n-ன் சார்பு.

(i) $m \geq 1$ என்ற மதிப்புகளுக்குத் தொகுபடு சார்பு $x = 0$ எனும் புள்ளியில் தொடர்ச்சியாக உள்ளது. ஆனால் $m < 1$ மதிப்புகளுக்கு $x \to 0$ எனும்போது தொகுபடு சார்பு முடிவிலியை நெருங்குகிறது.

(ii) $n \geq 1$ மதிப்புகளுக்கு, $x = 1$ எனும் புள்ளியில், தொடர்ச்சியாகவுளது. $n < 1$ மதிப்புகளுக்கு, $x \to 1$ எனும்போது முடிவிலியை நெருங்குகிறது.

(iii) 0 அல்லது 1 தவிர மற்ற x-ன் மதிப்புகளுக்குச் சார்பு தொடர்ச்சியாகவுளது.

எனவே, $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\cdot dx$ என்ற $\beta(m, n)$ சார்பு $m \geq 1$, $n \geq 1$ என்ற வெளியில் m, n என்ற சாராமாறிகளில் ஒரு வரையறுத்த தொகையீடாகும்.

§ 64. $m < 1$, $n < 1$ மதிப்புகளுக்கு $\beta\,(m, n)$ ஒருங்குதல்.

$$\int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\cdot dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\cdot dx$$

$$= I_1 + I_2 \text{ என்போம்.}$$

$n = 0$ **எல்லையில் ஒருங்குதல்**

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\cdot dx$$

$$f(x) = \frac{(1-x)^{n-1}}{x^{1-n}} \text{ என்றும், ஒப்புமைச்சார்பு}$$

$$g\,(x) = \frac{1}{x^{1-m}} \text{ என்றுங் கொண்டால்}$$

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{f\,(x)}{g\,(x)} = \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{(1-x)^{n-1}}{x^{1-m}}\cdot\frac{x^{1-n}}{1} = 1$$

இங்கு $\mu = 1 - m$

$\therefore$ ஒருங்கக் கட்டுப்பாடு $\mu < 1$ என்பதிலிருந்து

$1 - m < 1 \qquad \therefore\ -m < 0$

அதாவது, $m > 0$ எனில் I_1 ஒருங்கும்.

$x = 1$ **எல்லையில் ஒருங்குதல்**

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1}\cdot(1-x)^{n-1}\cdot dx$$

$$\text{இங்கு } f\,(x) = \frac{x^{m-1}}{(1-x)^{1-n}}$$

$$(g\,x) = \frac{1}{(1-x)^{1-n}}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1}}{(1-x)^{1-n}} \cdot \frac{(1-x)^{1-n}}{1} = 1$$

(எல்லை = $\lim$)

$$\mu = 1-n$$

$\therefore$ $1-n < 1$ அதாவது $n>0$ எனில் I_2 ஒருங்கும்.

முடிவு : $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ **என்ற தொகை** m, n **மிகை எண்களானால் (> 0), வரையறுத்த தொகையீடாகும்.** m, n **வெவ்வேறு மிகை மதிப்புகள் பெற்றுவரும் தொகையீடுகளே பீட்டா சார்புகள் ஆகும்.**

$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\cdot dx$ $(m>0, n>0)$ என்ற தொகையீட்டில், $x = \sin^2\theta$ எனப்பிரதியிட

$x = 0$ என, $\theta = 0$; $x = 1$ என, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$dx = 2\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot d\theta$

$$\therefore \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\cdot dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2}\theta\cdot\cos^{2n-2}\theta\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cdot\cos^{2n-1}\theta\cdot d\theta$$

$$= 2\frac{(2m-2)(2m-4)\ldots\ldots(2n-2)(2n-4)\ldots}{(2m+2n-2)(2m+2n-4)\ldots\ldots}$$

குறிப்பு : $(2m-1)$, $2n-1)$ இரட்டைப்படை முழு எண் களானால் முடிவுப் பெருக்கல் $\frac{\pi}{2}$.

§ 65. பீட்டா சார்பின் பண்புகள்

பண்பு : 1 படிக்குறைப்பு

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1} \cdot dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{n-1}\, d\left(\frac{x^m}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{m}\Big[x^m \cdot (1-x)^{n-1}\Big]_0^1 - \frac{1}{m}\int_0^1 x^m \cdot (n-1)(1-x)^{n-2}(-1)\, dx$$

$$= + \frac{(n-1)}{m}\int_0^1 x^m \cdot (1-x)^{n-2} \cdot dx$$

$$= \frac{(n-1)}{m}\, \beta(m+1, n-1) \qquad \text{...(i)}$$

$$= -\frac{(n-1)}{m}\int_0^1 (-x) \cdot x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-2} \cdot dx$$

$$= -\frac{(n-1)}{m}\int_0^1 \overline{(1-x} - 1) \cdot x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-2} \cdot dx$$

$$= -\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \cdot dx$$

$$+ \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-2} \cdot dx$$

$$= -\left(\frac{n-1}{m}\right)\beta(m, n) + \left(\frac{n-1}{m}\right)\beta(m, n-1)$$

$$\therefore \left(1 + \frac{n-1}{m}\right)\beta(m, n) = \frac{n-1}{m}\cdot\beta(m, n-1)$$

$$\therefore \beta(m, n) = \frac{n-1}{m+n-1}\beta(m, n-1) \quad \ldots\text{(ii)}$$

(i)-லிருந்து, (a) n ஒரு மிகை முழுஎண் எனில்,

$$\beta(m, n) = \frac{n-1}{m}\beta(m+1, n-1)$$

இங்கு n-ன்படி குறைந்த அளவுக்கு m-ன்படி உயர்கிறதைக் காணலாம்.

$$\therefore \beta(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)}{m(m+1)}\cdot\beta(m+2, n-2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2\cdot 1}{m(m+1)\ldots(m+n-2)}\beta(m+n-1, 1)$$

$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\ldots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}\,dx$$

$$= \frac{(n-1)!}{(m(m+1)\ldots(m+n-2)}\cdot\frac{1}{(m+n-1)}$$

(b) m, n இரண்டும் முழு எண்களெனில்

$$\beta(m, n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{m+n-1)!}$$

(ii)-லிருந்து, $\beta(m, n) = \dfrac{n-1}{(m+n-1)}\beta(m, n-1)$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{(m+n-1)(m+n-2)}\beta(m, n-2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)} \beta(m, 1)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(m+n-1)\ldots(m+1)} \int_0^1 x^{m-1} \cdot dx$$

$$= \frac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)} \cdot \frac{1}{m}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

§ 64-ல் $(2m-1)$, $(2n-1)$ இரட்டைப்படை முழு எண்களானால்,

$$\beta(m, n) = 2\, \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots(2n-2)(2n-4)}{(2m+2n-2)(2m+2n-4)\ldots\ldots\ldots} \times \frac{\pi}{2}$$

எனக் கண்டோம்.

இதைச் சுருக்க, $\beta(m, n) = \frac{(m-1)(m-2)\ldots(n-1)(n-2)}{(m+n-1)(m+n-2)\ldots} \cdot \pi$

$(2m-1)$, $(2n-1)$ ஒற்றைப் படையானால்,

$$\beta(m, n) = 2\, \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 2\,(2n-2)(2n-4)\ldots 2}{(2m+2n-2)(2m+2n-4)\ldots\ldots\ldots 4}$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta.$$

$$= \frac{2(m-1)(m-2)\ldots 1\,(n-1)(n-2)\ldots 1}{(m+n-1)(m+n-2)\ldots\ldots 2 \ldots\ldots 2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$ எனவாகும்.

குறிப்பு : (i) $\beta\ (m, n)$-ன் மதிப்பைத் தொடர் காரணீயப் பெருக்கல்களாகக் காட்ட (factorial) m, n இரண்டும் மிகை முழு எண்களாக இருக்கவேண்டும்.

(ii) m அல்லது n முழு எண்ணாக இருப்பின் $(m-1)!$ அல்லது $(n-1)!$ தொகுதியில் வரும்.

பண்பு : 2.

$\beta\ (m, n) = \beta\ (n, m)$ எனக்காட்டலாம்.

$$\beta\ (m, n) = \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\cdot dx$$

$1 - x = u$ என்க, $-dx = du$

$x = 0$ எனில் $u = 1$, $x = 1$ எனில் $u = 0$,

$$\therefore\quad \beta\,(m, n) = -\int_1^0 (1-u)^{m-1}\cdot u^{n-1}\cdot du$$

$$= \int_0^1 u^{n-1}\cdot(1-u)^{m-1}\,du.$$

$$= \beta\,(n, m).$$

எ. கா. 1.

$\int_0^1 x^3\,(1-x)^{\frac{5}{2}}\cdot dx$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$m - 1 = 3 \qquad \therefore\ m = 4$

$n - 1 = \frac{5}{2} \qquad \therefore\ n = \frac{7}{2}$

$$\therefore\quad \beta\left(4, \frac{7}{2}\right) = \beta\left(\frac{7}{2}\cdot 4\right) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{13}{2}}$$

$$= \frac{2^5}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13}$$

எ: கா. 2.

$$\int_0^1 x^4 (1-x)^{\frac{1}{4}} \cdot dx$$ — மதிப்புக் காண்க.

இங்கு $m = 5,\ n = \frac{5}{4}$

$$\therefore\ \beta\left(5, \frac{5}{4}\right) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\frac{5}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{13}{4} \cdot \frac{17}{4} \cdot \frac{21}{4}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4^6}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 21}$$

$$= \frac{2^{13}}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17}$$

எ கா. 3.

$$\frac{\beta(p, q+1)}{q} = \frac{\beta(p+1, q)}{p} = \frac{\beta(p, q)}{p+q}$$

எனக்காட்டுக.

$$\beta(p, q+1) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q \, dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^q . d\frac{(x^p)}{p}$$

$$= \frac{1}{p} \left[x^p \cdot (1-x)^p\right]_0^1$$

$$+ \frac{1}{p} \int_0^1 x^p \cdot q\ (1-x)^{q-1} \cdot dx$$

$$= + \frac{q}{p} \int_0^1 x^p \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx.$$

$$= \frac{q}{p} \beta(p+1, q) \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\therefore \quad \frac{\beta(p, q+1)}{q} = \frac{\beta(p+1, q)}{p}$$

(1)-லிருந்து, $\beta(p, q+1) = \frac{q}{p}\,\beta(p+1, q)$

$$= \frac{q}{p}\int_0^1 x^p (1-x)^{q-1}\,dx$$

$$= -\frac{q}{p}\int_0^1 x^{p-1}\cdot(-x)(1-x)^{q-1}\cdot dx$$

$$= -\frac{q}{p}\int_0^1 x^{p-1}\,(\overline{1-x}-1)(1-x)^{q-1}\cdot dx$$

$$= -\frac{q}{p}, \beta(p, q+1) + \frac{q}{p}\,\beta(p, q)$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{q}{p}\right), \beta(p, q+1) = \frac{q}{p}\,\beta(p, q)$$

$$\therefore \quad \frac{\beta(p, q+1)}{q} = \frac{\beta(p, q)}{(p+q)}$$

$$\therefore \quad \frac{\beta(p, q+1)}{q} = \frac{\beta(p+1, q)}{p} = \frac{\beta(p, q)}{p+q}$$

எ. கா. 4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\theta \cdot \cos^q\theta\cdot d\theta\cdot$$

$$p > -1, = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$$

$q > -1$

$$B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) = \int_0^1 x^{\frac{p-1}{2}} (1-x)^{\frac{q-1}{2}} dx$$

0, 1 எல்லைகளில் தொகுபடும் சார்பு ஒருங்கக் கட்டுப்பாடு

$\frac{p+1}{2} > 0$, அதாவது $p > -1$

$\frac{q+1}{2} < 0$ அதாவது $q > -1$

$x = \sin^2\theta$ என்றிட,

$$\beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}\theta \cos^{q-1}\theta \cdot 2\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\theta \cdot \cos^q\theta \cdot d\theta$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\theta \cdot \cos^q\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{1}, \frac{q+1}{2}\right)$$

எ. கா. 5.

மதிப்பிடுக. $\int_0^2 x^4 (8-x^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot dx$

$x^3 = 8u$ என்றிட

$x = 2u^{\frac{1}{3}}$, $3x^2\, dx = 8\, du$

$x = 0$ எனில், $u = 0$; $x = 2$ எனில், $u = 1$

$$\therefore \int_0^2 x^4 (8 - x^3)^{-\frac{1}{3}} dx = \int_0^1 4u^{\frac{2}{3}} 8^{-\frac{1}{3}} (1 - u)^{-\frac{1}{3}} \times \tfrac{8}{3} . du.$$

$$= \tfrac{16}{3} \int_0^1 u^{\frac{5}{3}-1} (1 - u)^{\frac{2}{3}-1} du$$

$$= \tfrac{16}{3} \beta (\tfrac{5}{3}, \tfrac{2}{3})$$

பண்பு : 3.

$$\beta (m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1 \times x)^{m+n}} dx \text{ எனக்காண்க.}$$

$$\beta (m, n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1 - x)^{n-1} dx$$

இங்கு $x = \dfrac{1}{1 + y}$ எனப்பிரதியிட

$$dx = - \frac{1}{(1 + y)^2} dy$$

$x = 0$ எனில், $y = \infty$

$x = 1$ எனின, $y = 0$

$$\therefore \beta (m, n) = - \int_\infty^0 \left(\frac{1}{1 + y}\right)^{m-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + y}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(1 + y)^2} \cdot dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{(1 + y)^{m-1}} \cdot \frac{y^{n-1}}{(1 + y)^{n-1}} \cdot \frac{1}{(1 + y)^2} \cdot dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} \cdot dy = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} \cdot dx$$

குறிப்பு :

$$\beta(m, n) = \beta(n, m)$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^{n-1} \cdot dx}{(1+x)^{m+n}} = \int^\infty \frac{x^{m-1} \cdot dx}{(1+x)^{m+n}}$$

எ. கா. 1.

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1} \cdot dx}{(a+bx)^{m+n}} = \frac{1}{a^n \cdot b^m} \cdot \beta(m, n)$$ என நிறுவுக.

$$\frac{x}{a+bx} = \frac{u}{b}$$ என்றிட,

$$bx = au + bu \cdot x \qquad \therefore \quad bx(1-u) = au$$

$$\therefore \quad x = \frac{au}{b(1-u)}$$

$$\therefore \quad dx = \frac{a}{b} \frac{[(1-u) - (-1) \cdot u]\, dx}{(1-u)^2}$$

$$= \frac{a \cdot du}{b(1-u)^2}$$

$x = 0$ எனில், $u = 0$; $x = \infty$ எனில், $u = 1$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^{m-1} \cdot dx}{(a+bx)^{m+n}} = \int_0^\infty \frac{x^{m+n} \cdot x^{-n-1}}{(a+bx)^{m+n}} \cdot dx$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{x}{(a+bx)} \right]^{m+n} \cdot \frac{dx}{x^{n+1}}$$

$$= \int_0^1 \frac{u^{m+n}}{b^{m+n}} \times \frac{b^{n+1}(1-u)^{n+1}}{(au)^{n+1}} \cdot \frac{a\,du}{b(1-u)^2}.$$

$$= \frac{ab^{n+1}}{b^{m+n+1} \cdot a^{n+1}} \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1} \cdot du$$

$$= \frac{1}{a^n \cdot b^m} \beta(m, n)$$

எ. கா. 2.

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = 2\beta(m, n) \text{ எனக்காட்டுக.}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} = \int_0^\infty \frac{x^{m-1} \cdot dx}{(1+x)^{m+n}} + \int_0^\infty \frac{x^{n-1} \cdot dx}{(1+x)^{m+n}}$$

$$= \beta(m, n) + \beta(n, m)$$

$$= 2\beta(m, n)$$

எ. கா. 3.

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} \cdot dx = \beta(m, n) \text{ என நிறுவுக.}$$

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} \cdot dx = \int_0^1 \frac{x^{m-1} \cdot dx}{(1+x)^{m+n}}$$

$$+ \int_1^\infty \frac{x^{m-1} \cdot dx}{(1+x)^{n+m}}$$

2-வது தொகையீடு $\int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} \cdot dx$-ல்

$x = \frac{1}{t}$ என்றிட, $x = 1$ எனில் $t = 1$

$x = \infty$ எனில் $t = \frac{1}{\infty} = 0.$

$dx = -\frac{1}{t^2}\, dt.$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{x^{m-1} \cdot dx}{(1+x)^{m+n}} = \int_1^0 \frac{1}{t^{m-1}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{m+n}}\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1 \cdot t^{m+n}}{t^{m+1}(1+t)^{m+n}}\, dt.$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{m+n}} \cdot dt = \int_0^1 \frac{x^{n-1} \cdot dx}{(1+x)^{m+n}}$$

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} \cdot dx}{(1+x)^{m+n}} + \int_0^1 \frac{x^{n-1} \cdot dx}{(1+x)^{m+n}}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+u}} \cdot dx.$$

எ. கா. 4.

$\int_a^b (x-a)^{-1}(b-x)^{m-1} \cdot dx$ — மதிப்பிடுக.

$x = py + q$ என்று பிரதியிட்டு

$x = a$ எனும்போது, $y = 0$ ஆனல், $a = 0 + q$ (1)

$x = b$ எனும்போது $y = 1$ ஆனல் $b = p + q$ (2)

$= p + a$

$\therefore$ (1), (2) லிருந்து, $x = (b - a)\, y + a$

$$\therefore \quad (b - x) = (b - a) - (b - a)y$$

$$= (b - a)(1 - y)$$

$$\therefore \quad dx = (b - a) \cdot dy$$

$$\therefore \int_a^b (x - a)^{l-1} \cdot (b - x)^{m-1} \cdot dx = \int_0^1 (b - a)^{l-1} \cdot$$

$$y^{l-1} \cdot (b - a)^{m-1} \cdot (1 - y)^{m-1} (b - a) \cdot dy$$

$$= (b - a)^{l+m-1} \int_0^1 y^{l-1} \cdot (1 - y)^{m-1} \cdot dy$$

$$= (b - a)^{l+m-1}\, \beta\,(l, m)$$

எ.கா. 5

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{x-1} \cdot dt$$

$= n^x \cdot \beta\,(x, n + 1)$ எனக் காட்டுக

$\dfrac{t}{n} = u$ என்க.

$\dfrac{1}{n} \cdot dt = du \quad t = 0$ எனில், $u = 0$

$t = n$ எனில், $u = 1$

$$tn^{-1} = n^{x-1} \cdot u^{x-1}$$

$$\therefore \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{x-1} \cdot dt = \int_0^1 (1 - u)^{n+1-1} \cdot n^{x-1} \cdot u^{x-1} \cdot du$$

$$= n^x \int_0^1 u^{x-1} \cdot (1-u)^{\overline{n+1}-1}\, du$$

$$= n^x \cdot \beta\,(x, n+1),\ [x<0\,;\ n+1>0]$$

இங்கு $n = 1, 2, 3\ldots\ldots$ என மிகை முழு எண்களானல்

$$n^x\,\beta\,(x, n+1) = \frac{n^x \cdot n!}{x\,(x+1)\ldots\ldots(x+n)}$$

பயிற்சி 46

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\beta\,(p, q) = \beta\,(p+1, q) + \beta\,(p, q+1)$

2. $\displaystyle\int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x^2)^{n-1} \cdot dx = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{m}{2}, n\right)$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^5}} = \frac{1}{5}\,\beta\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$

4. $\displaystyle\int_0^p x^m \cdot (p^q - x^q)^n \cdot dx = \frac{p^{qn+m+1}}{q}\,\beta\left(n+1, \frac{m+1}{q}\right)$

   $p > 0,\ q > 0,\ m+1 > 0,\ n+1 > 0$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx = \beta\,(p, q)$

6. $\displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} \cdot (1-x)^{-\frac{2}{3}} \cdot dx = \frac{1}{9^{\frac{1}{3}}}\,\beta\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

   $t = \left(\text{இங்கு } \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{at}{1-t} \text{ எனக்கொள்க.}\right)$

7. $$\int_0^1 \frac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}}{(b+cx)^{l+m}} \cdot dx = \frac{\beta(l, m)}{(b+c)^l \cdot b^m}$$

8. $$\int_0^\pi \frac{\sin^{n-1} x \cdot dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{2^{n-1}}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}n}} \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$$ ($a^2 > b^2$ எனும்போது)

மதிப்பு காண்க :

9. $$\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}$$

10. $$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}$$

§ 66. காமா சார்புகள்

$\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^n \cdot dx$, n ஒரு மிகை முழு எண் எனில், பகுத்துப் பிரித்தல் முறைப்படி n-ன் படியைக் குறைக்க.

$$\begin{aligned} I_n &= \int e^{-x} \cdot x^n \cdot dx = \int x^n \cdot d(-e^{-x}) \\ &= -e^{-x} \cdot x^n + n \int e^{-x} \cdot x^{n-1} \cdot dx \\ &= -e^{-x} \cdot x^n + n \cdot I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^n \cdot dx &= -\left[e^{-x} \cdot x^n\right]_0^\infty + n \cdot I_{n-1} \\ &= n(n-1) \cdot I_{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= n(n-1)\ldots\ldots 2 \cdot 1 \int_0^\infty e^{-x} \cdot dx \\ &= n!\,(-e^{-x})_0^\infty = n!\left(-\frac{1}{e^\infty} + 1\right) \\ &= n! \end{aligned}$$

கிளை : 1.

$$\int_0^\infty e^{-az} \cdot z^n \cdot dz$$

$$= \int_0^\infty e^{-az} \cdot (az)^n \cdot \frac{d(az)}{a^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^n \cdot dx, \quad az = x$$

$= \dfrac{n!}{a^{n+1}}$, இங்கு a ஒரு மிகை எண்.

கிளை : 2.

$$\int_0^1 x^m (\log x)^n \cdot dx$$

$x = e^{-z}$ எனப்பிரதியிட்டால்

$dx = -e^{-z} \cdot dz \qquad x = 0$ எனில், $z = \infty$

$x = 1$ எனில், $z = 0$

$$\therefore \int_0^1 x^m (\log x)^n \cdot dx = -\int_\infty^0 e^{-mz} (-z)^{n-z} \cdot e \cdot dz$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty e^{-(m+1)z} z^n \cdot dz$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

$$\therefore \int_0^1 x^m \left(\log \frac{1}{x}\right)^n \cdot dx = \int_0^1 x^m \cdot (\log 1 - \log x)^n \cdot dx$$

$$= (-1)^n \cdot \int_0^1 x^m (\log x)^n \cdot dx$$

$$= (-1)^{2n} \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

§ **67.** $\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{n-1} \cdot dx$ என்ற தகாத்தொகை ஆயிலரின் இரண்டாவது வரையறுத்த தொகை அல்லது காமா சர்பு $\Gamma(n)$ என வழங்கப்படுகிறது.

(ஆயிலரின் முதல் வரையறுத்த தொகை

$\int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1} \cdot dx$-ஐ முன்பே கண்டோம்)

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^n \cdot dx \qquad \int_0^\infty x^n \, d(-e^{-x})$$

$$= \left[-e^{-x} x^n\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} \, dx^n$$

$$= 0 + n \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{n-1} \, dx$$

$$= n \, \Gamma(n)$$

$\therefore$ n ஒரு மிகை முழு எண் எனில்

$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n = n!$ (§ 66)

கிளை 1.

$$\int_0^1 \frac{\log x}{(1-x)} \cdot dx$$

$$= \int_0^1 \log x \, (1 + x + x^2 + \ldots\ldots) \, dx$$

$\because \quad x < 1$ எனில் $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots \infty$ க்கு

$$= \int_0^1 \log x \cdot dx + \int_0^1 x \log x \, dx + \ldots\ldots +$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n (\log x)^1 dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{1}{(n+1)^{1+1}} \quad [\S\ 66 \text{ கிளை 2-ல் கண்டபடி}]$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots \right)$$

அதுபோலவே,

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x} \cdot dx$$

$$= \int_0^1 \log x \, (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots) \, dx \quad x < 1$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots\ldots \right)$$

பயிற்சிகள் 47

திறுவுக :

1. $\displaystyle\int_0^1 \left[\log \left(\frac{1}{x} \right) \right]^n \cdot dx = n\,!$

2. $\displaystyle\int_0^\infty a^{-x} \cdot x^n \cdot dx = \frac{n\,!}{(\log a)^{n+1}}$

3. $$\int_0^1 \frac{\log x}{(1-x^2)}\, dx = -\frac{\pi^2}{8}$$

4. $$\int_0^1 \frac{1}{x} \log \frac{(1+x)}{(1-x)}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$$

5. $$\int_0^1 \frac{(\log x)^{2n-1}}{1-x} \cdot dx = -1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n-1)$$
$$\times \left[1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots \right]$$

§ **68.** கொடுத்த 0, 1 எல்லைகளில் காமா சார்பு ஒருங்குதலை இங்கு ஆராய்வோம்.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{n-1} \cdot dx$$

(i) $n \geq 1$ எனும்போது தொகுபடும் சார்பு, $x = 0$ புள்ளியில் தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

(ii) $n < 1$ எனும்போது, $x = 0$ புள்ளியில், தொடர்ச்சியற்று முடிவிலியாகிறது.

இப்போது

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{n-1} \cdot dx = \int_0^1 e^{-x} \cdot x^{n--} \cdot dx$$
$$+ \int_1^\infty e^{-x} \cdot x^{n-1} \cdot dx$$
$$= I_1 + I_2$$

எனப்பிரித்து $n < 1$ எனும் மதிப்புகளில் ஆராய்வோம்.

0-ல் ஒருங்குதல் :

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} \cdot x^{n-1}\, dx$$

இங்கு, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^{1-n}}$, ஒப்புமைச் சார்பு $g(x) = \dfrac{1}{x^{1-n}}$

$$\therefore \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{e^{-x}}{x^{1-n}} \times \frac{x^{1-n}}{1} = 1$$

$$\mu = 1 - n < 1$$

அதாவது $n > 0$ மதிப்புகளுக்கு

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-n}} \cdot dx, \text{ அல்லது } \int_0^1 x^{n-1} \cdot dx \text{ ஒருங்கும்.}$$

அதுபோலவே, $I_1 = - e^{-x} \cdot x^{n-1} \cdot dx$-ம் ஒருங்கும்.

∞-ல் ஒருங்குதல்:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \text{ என்ற}$$

முடிவிலித் தொடரிலிருந்து $e^x > e^{n+1}$ என அறிகின்றோ

$$\therefore \quad e^{-x} < x^{-n-1}$$

$$\therefore \quad x^{n-1} e^{-x} < x^{n-1} \cdot x^{-n-1}$$

$$< \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \quad I_2 = \int_1^X x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot dx < \int_1^X \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$< \left(- \frac{1}{x} \right)_1^X$$

$$< - \frac{1}{X} + 1$$

$\therefore \quad X > 1$ எனும்போது $\int_1^X \frac{1}{x^2}\, dx$ மேல் வரம்புள்ளது. அது

போலவே, $\int_1^X x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$ மேல் வரம்பு கொண்டது.

அதாவது,

n-ன் எல்லா மிகை மதிப்புகளுக்கும் $x \to \infty$ எனும்போது

$I_2 = \int_1^\infty x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$ ஒருங்கும்.

முடிவு

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

n-ன் எல்லா மிகை மதிப்புகட்கும் ஒரு வரையறுத்த தொகையாகும்.

கிளை : **1.** $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot dx = -\left(e^{-x}\right)_0^\infty$

$\therefore \quad \Gamma(1) = 1 \qquad\qquad = 1 - \frac{1}{e^\infty} = 1$

கிளை : **2.** $\Gamma(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} \cdot dx = \infty$ எனக்காணலாம்.

கிளை : **3.** n — மிகை முழு எண் எனில்,

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\,\Gamma(n-1)\\ &= (n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2)\\ &= (n-1)(n-2) \ldots\ldots 2\cdot 1\ \Gamma(1)\\ &= 1\cdot 2\cdot 3 \ldots\ldots (n-1) = (n-1)!\end{aligned}$$

§ 69. காமா பீட்டர் சார்புகளிடையேயுள்ள தொடர்புகள்.

(1) $\beta(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ என நிறுவுதல்.

$\int_0^\infty x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$-ல் x-இருக்குமிடத்து zx என்றிட எல்லைகள் மாரு. இங்கு z ஆனது x-ஐயொட்டி ஒரு மாறிலி.

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty (zx)^{m-1} \cdot e^{-zx} \cdot z \cdot dx$$

$$= \int_0^\infty z^{m} x^{m-1} \cdot e^{-zx} \cdot dx \qquad \ldots\ldots (A)$$

$$\therefore \int_0^\infty x^{m-1} \cdot e^{-zx} \cdot dx = \frac{\Gamma(m)}{z^m} \qquad \ldots\ldots (B)$$

(A)-யிலிருந்து, $\Gamma(m) \cdot e^{-z} \cdot z^{n-1}$

$$= \int_0^\infty z^{m+n-1} \cdot e^{-z(1+x)} \cdot x^{m-1} \cdot dx.$$

இரு புறமும் z-ன் சார்பாக, z-ஐயொட்டி $(0, \infty)$ எல்லைக்குள் தொகையிட,

$$\Gamma(m) \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{n-1} \cdot dz$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-z(1+x)} \cdot z^{m+n+1}\, dz\right] x^{m-1} \cdot dx.$$

$$\therefore \quad \Gamma(m)\,\Gamma(n) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(m+n)}{(1+x)^{m+n}} \cdot x^{m-1} \cdot dx$$

(B)-யிலிருந்து

$$= \Gamma(m+n) \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} \cdot dx.$$

$$= \Gamma(m+n), \beta(m,n)$$

$$\therefore \quad \beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

(2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ என நிறுவுதல்.

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$m = n = \frac{1}{2}$ என மதிப்பிட,

$$\beta(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2$$

$\because \quad \Gamma(1) = 1$

ஆனால்

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \cdot dx.$$

$x = \sin^2\theta$ என்றிட, $dx = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$.

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta\, d\theta.$$

$$\therefore \quad \beta(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0\theta \cdot \cos^0\theta \cdot d\theta.$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\therefore \quad [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \pi$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

3. $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ என நிறுவுதல்.

$x^2 = t$ என்றிட, $2x \cdot dx = dt$

$$\therefore \quad dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{1}{2}-1} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

4. $x + y < 1$ எனும்போது,

$$\int_0^1 x^{m-1}\left[\int_0^{1-x} y^{n-1} \cdot dy\right]dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$$

$$\int_0^{1-x} y^{n-1}\, dy = \frac{1}{n}\Big(y^n\Big)_0^{1-x} = \frac{(1-x)^n}{n}$$

$$\therefore \int_0^1 x^{m-1}\left[\int_0^{1-x} y^{n-1} \cdot dy\right]dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n \cdot dx$$

$$= \frac{1}{n}\,\beta(m, n+1)$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\Gamma(m)\, n \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$$

$\therefore \quad x + y < 1$ எனும்போது

$$\iint x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot dx\, dy = \frac{\Gamma \cdot (m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ எனக் காட்டுக.

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1} \cdot dy}{(1+y)^{m+1}}$$

$$= \int_0^1 \frac{y^{m-1} \cdot dy}{(1+y)^{m+n}} + \int_1^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy$$

$$= I_1 + I_2$$

I_2-ல், $y = \frac{1}{x}$ என்றிட, $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$ எனவாகும்.

$\therefore\ y = x$ என, $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+1}}\, dx$

$$\therefore\ \beta(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

ஆனால், $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} \cdot dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

6. $\int_0^\infty \frac{y^{m-1} \cdot dy}{(ay+b)^{m+n}} = \frac{1}{a^m b^n} \cdot \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ என நிறுவுக.

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1} \cdot dx}{(1+x)^{m+u}} = m, n)$$

இங்கு, $x = \frac{ay}{b}$ என்றிட $dx = \frac{a}{b} \cdot dy$

$$\therefore \beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} \cdot \frac{y^{m-1}}{\left(1 + \frac{ay}{b}\right)^{m+n}} \times \frac{a}{b} \cdot dy$$

$$= \frac{a^m \cdot b^{m+n}}{b^m} \int_0^\infty \frac{y^{m-1} \cdot dy}{(ay+b)^{m+n}}$$

$$= a^m \cdot b^n \int_0^\infty \frac{y^{m-1} \cdot dy}{(ay+b)^{m+n}}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{y^{m-1} \cdot dy}{(ay+b)^{m+n}} = \frac{B(m, n)}{a^m \cdot b^n} = \frac{1}{a^m \cdot b^n} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+x)}$$

7. $x = \sin^2\theta$ என்று பிரதியிட,

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1 - x)^{n-1} \cdot dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta \cdot d\theta$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta \cdot d\theta = \tfrac{1}{2} B(m, n)$$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)}$$

இங்கு $2m = p$, $2n = q$ என்றால்,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}\theta \cdot \cos^{q-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

கிளை : 1.

$q = 1$ என்றால்

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}\theta \cdot d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

வினா 2.

$p = q$ என்றால்

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}\theta \cdot \cos^{p-1}\theta \cdot d\theta = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^2}{2\,\Gamma\,(p)}$$

இடது பக்கம் $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}\theta \cdot \cos^{p-1}\theta \cdot d\theta.$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin\theta \cdot \cos\theta)^{p-1}}{2^{p-1}} \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} 2\,\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} 2\theta \cdot d\,\theta$$

$$= \frac{1}{2^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} z \cdot dz\,;\; z = 2\theta$$

$$= \frac{1}{2^p} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} z \cdot dz$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} 2 \cdot dz$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma \frac{(p+1)}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot 2^{p-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma \frac{(p+1)}{2}}$$

$$\therefore \frac{\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^2}{2\,\Gamma(p)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2 \cdot 2^{p-1}\, \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}$$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{p-1}} \cdot \Gamma(p)$$

இங்கு $p = 2m$ எனில்,

$$\Gamma(m) \cdot \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\pi-1}} \cdot \Gamma(2m)$$

குறிப்பு, இதற்கு இரட்டிக்கும் வாய்பாடு (Duplication Formula) என்று பெயர்.

8. $$\int_0^{\infty} \frac{y^{m-1} \cdot dy}{(ay+b)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{a^m \cdot b^n \cdot \Gamma(m+n)}$$

என்று முன்பு அறிந்த முடிவில், $y = \tan^2\theta$ எனப் பிரதியிட, $dy = 2\tan\theta \cdot \sec^2\theta \cdot d\theta$

$$y = 0 \text{ என, } \theta = 0; \quad y = \infty \text{ என } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1} \cdot dy}{(ay+b)^{m+n}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{2m-2}\theta \cdot 2\tan\theta \cdot \sec^2\theta \cdot d\theta}{(a\tan^2\theta + b)^{m+n}}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2m+2n}\theta \cdot d\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n} \cdot \cos^{2m-1}\theta\cos^2\theta}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta \cdot d\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta \cdot d\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}}$$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2a^m \cdot b^n \cdot \Gamma(m+n)}$$

9. $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ என்று கொண்டு,

$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ எனக் காட்டுக.

$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x} \cdot dx$-ல் $x = \frac{y}{1-y}$ எனப் பிரதியிடுக.

$$dx = \frac{(1-y) \cdot 1 - y(-1)\,dy}{(1-y)^2}$$

$$= \frac{dy}{(1-y)^2}$$

$x = 0$ எனில் $y = 0$

$x = \infty$ எனில் $1 - y = 0$ i.e. $y = 1$

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1} \cdot dx}{(1+x)} = \int_0^1 \frac{y^{n-1} \cdot dy}{(1-y)^{n-1}\left(1+\frac{y}{1-y}\right)(i-y)^2}$$

$$= \int_0^1 y^{n-1} \cdot (1-y)^{-n} \cdot dy$$

$$= \int_0^1 y^{n-1} (1-y)^{\overline{1-n}-1} \cdot dy$$

$$= \beta (n, 1-n) = \frac{\Gamma (n) \Gamma (1-n)}{\Gamma (1)}$$

ஆனல் கொள்கைப்படி, $\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x} \cdot dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}$

$$\therefore \quad \Gamma (n) \Gamma (1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \quad \because \quad \Gamma (1) = 1$$

குறிப்பு : இங்கு $n = \frac{1}{2}$ என்றிட

$$[\Gamma (\tfrac{1}{2})]^2 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\therefore \quad [\Gamma (\tfrac{1}{2})] = \pi \text{ (முன்பு கண்டது)}$$

10. $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \cdots\cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$ என நிறுவுக.

இடது பக்கப் பெருக்கத்தை P என்போம்.

$$P^2 = \Gamma \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma \left(\frac{2}{n}\right) \Gamma \left(\frac{3}{n}\right) \cdots\cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\times \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \times \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right)$$

$$\cdots\cdots \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\right]$$

$$\cdots\cdots \left[\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

ஆனல் $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ எனக் கண்டோம்.

n-ஐ $\frac{1}{n}$ ஆக மாற்ற,

$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad P^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}} \cdots\cdots \frac{\pi}{\sin\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}$$

$$= \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdots\cdots \sin\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}$$

கோண கணிதப்படி,

$x^{2n} - 1 = 0$ என்ருல்

$x^{2n} = 1 = \cos 2p\pi \pm i \sin 2p\pi$

$$\therefore \quad x = \cos\frac{2p\pi}{2n} \pm i \sin\frac{2p\pi}{2n}$$

$$= \cos\frac{p\pi}{n} \pm i \sin\frac{p\pi}{n}$$

$$\therefore \quad \left(x - \cos p\frac{\pi}{n}\right)^2 = -\sin^2 p\frac{\pi}{n}$$

$$x^2 - 2x\cos p\frac{\pi}{n} + 1 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \prod_{p=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cdot \cos p\frac{\pi}{n} + 1 \right)$$

வகுக்க, $x^{2n-2} + x^{2n-4} + \ldots\ldots + x^2 + 1 =$

$$\prod_{p-1}^{n-1} \times \left(x^2 - 2x \cdot \cos p\frac{\pi}{n} + 1 \right)$$

இங்கு $x = 1$ என்றிட

$$n = \left(2\sin\frac{\pi}{2n} \right)^2 \cdot \left(2\sin\frac{2\pi}{2n} \right)^2 \cdot \ldots\ldots$$

$$\times \left[2\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} \right]^2 \ldots\ldots I$$

$x = -1$ என்றிட

$$n = \left(2\cos\frac{\pi}{2n} \right)^2 \cdot \left(2\cos\frac{2\pi}{2} \right)^2 \ldots\ldots$$

$$\left(2\cos\frac{n-1}{2} \cdot \pi \right)^2 \ldots\ldots II$$

$\therefore$ $I \times II$ பெருக்கற்பலனுக்கு வர்க்கமூலம் காண

$$n = 2^{n-1} \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{2n} \ldots\ldots \sin\frac{n-1}{n} \cdot \pi$$

$$\therefore \quad P^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\frac{n-1}{\frac{n}{2}}} = \frac{2^{n-1} \cdot \pi^{n-1}}{n} \text{ எனவாகும்.}$$

$$P = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore \quad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \ldots\ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

பயிற்சிகள் 48

நிறுவுக :

1. $$\int_0^1 x^m (1-x^n)^p \cdot dx = \frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(p+1+\frac{m+1}{n}\right)}$$

2. $$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{a^n(1+a)^m\cdot(m+n)}$$

3. $$\int_0^1 \frac{x^2\cdot dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}} \times \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

4. $$\int_0^\infty \cos\left(bz^{\frac{1}{n}}\right)\cdot dz = \frac{\Gamma(n+1)\cos\frac{n\pi}{2}}{b^n}$$

5. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}$$

6. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\cdot dx = \frac{\pi}{2}$$

70. செய்முறை எடுத்துக்காட்டுகள்.

எ. கா. 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cdot dx = \pi$$ என நிறுவுக.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} x \cdot dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2 \cdot \frac{1}{4} - 1} x \cdot dx, \quad p = \tfrac{1}{4}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2 \cdot \frac{3}{4} - 1} x \cdot dx \; ; \; p = \tfrac{3}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}$$

$$\therefore \quad I_1 \times I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}$$

$$= \pi$$

எ. கா. 2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)}$$ எனக் காட்டுக.

$x^n = u$ என்க. எல்லைகள் 0, 1 எனவாகும்.

$n \cdot x^{n-1} \cdot dx = du \qquad 1 \; x = u^{\frac{1}{n}}$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \int_0^1 \frac{du}{nu^{\frac{n-1}{n}}(1-u)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{1}{n}-1} \cdot 1\,(1-u)^{\frac{1}{2}-1} \cdot du$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}$$

எ. கா. 3.

$\beta(x, x) = 2^{1-2x}\,\beta(x, \frac{1}{2})$ என நிறுவுக.

$$\beta(x, x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cdot \cos^{2x-1}\theta \cdot d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin\theta\cdot\cos\theta)^{2x-1}}{2^{(2x-1)}} \cdot d\theta$$

$$= \frac{2}{2^{2x-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\theta)^{2x-1}\, d\left(\frac{2\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^{\pi} \sin^{2x-1}\phi\, d\phi\ ;\quad \phi = 2\theta$$

$$= \frac{2}{2^{2x-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\phi \cdot d\phi$$

$$= \frac{2}{2^{2x-1}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin^{2x-1} \phi \cdot \cos^{2\cdot\frac{1}{2}-1} \cdot \phi \cdot d\phi$$

$$= \frac{2}{2^{2x-1}} \times \frac{1}{2} \cdot \beta \left(x, \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2^{1-2x} \beta (x, \tfrac{1}{2})$$

எ. கா. 4.

$$\int_0 \frac{x^2 (1-x)^8}{(1+x)^9} dx = \frac{1}{768} \text{ என நிறுவுக.}$$

$x = \frac{1-y}{1+y}$ எனப்பிரதியிட

$$1 + x = 1 + \frac{1-y}{1+y} = \frac{2}{1+y}$$

$$1 - x = 1 - \frac{1-y}{1+y} = \frac{2y}{1+y}$$

$$dx = \frac{(1+y)(-1) - (1-y) \cdot 1}{(1+y)^2} \cdot dy$$

$$= \frac{-1 - 1y - 1 + y}{(1+y)^2} \cdot dy = \frac{-2\,dy}{(1+y)^2}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{(1+y)^2} \cdot \frac{2^3 \cdot y^8}{(1+y)^8} \cdot \frac{(1+y)^9}{2^9} \cdot \frac{(-2)}{(1+y)^2} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{2^5} \int^1 (1-y)^2 \cdot y^8 (1+y)^2 \cdot dy$$

$$= \frac{1}{25}\int_0^1 y^2 \cdot (1-y^2)^2 \cdot \frac{d(y^2)}{2}$$

$$= \frac{1}{64}\int_0^1 u\,(1-u)^2 \cdot dx;\ u = y^2$$

$$= \frac{1}{64}\int_0^1 u^{2-1}(1-u)^{3-1} \cdot dx = \frac{1}{64}\,\beta\,(2, 3)$$

$$= \frac{1}{64}\,\frac{\Gamma(2)\,\Gamma(3)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{64} \cdot \frac{1!\,2!}{4!}$$

$$= \frac{1}{64} \cdot \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{768}$$

எ. கா. 5.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$ எனக்காட்டுக.

$x^n = \sin^2\theta$ · எனில் $= (\sin\theta)^{\frac{2}{n}}$

$n \cdot x^{n-1} \cdot dx = 2\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta.$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\theta\cos\theta \cdot d\theta}{n(\sin\theta)^{\frac{2n-2}{n}} \cdot \cos^{\frac{2}{n}}\theta}$$

$$= \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta \cdot \cos^{\left(1-\frac{2}{n}\right)}\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\left(2\cdot\frac{1}{n}-1\right)}\theta \cdot \cos^{2\left(1-\frac{1}{n}\right)-1}\theta\cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{n}\,\beta\left(\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

எ. கா. 6.

மதிப்பு காண்க :

$$\int_0^\infty \frac{n^4(1+x^5)}{(1+x)^{15}}\ dx$$

$$\int_0^\infty \frac{x^4\,(1+x^5)}{(1+x)^{15}}\ dx = \int_0^\infty \frac{x^4\cdot dx}{(1+x)^{15}} + \int_0^\infty \frac{x^9\cdot dx}{(1+x)^{15}}$$

$$= I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^{5-1}\ dx}{(1+x)^{5+10}} = \frac{\Gamma(10)\cdot\Gamma(5)}{\Gamma(15)} = \beta(5,10)$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{x^{10-1}\ dx}{(1+x)^{10+5}} = \frac{\Gamma(10)\,\Gamma(5)}{\Gamma(15)} = \beta(5,10)$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^4\,(1+x^5)}{(1+x)^{15}}\ dx = 2\ \frac{\Gamma(10)\cdot\Gamma(5)}{\Gamma(15)}$$

$$= 2 \times \frac{9!\,4!}{14!} = 2 \times \frac{4 \times 3 \times 2 \cdot 1}{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}$$

$$= \tfrac{1}{5005}.$$

எ. கா. 7.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$= \frac{1}{12 \cdot \sqrt{2\pi}} \left[\{\Gamma(\tfrac{1}{4})\}^2 + 12\,\{\Gamma(\tfrac{3}{4})\}^2 \right]$$

எனக்காட்டுக.

$x^2 = \cos\theta$ · எனக் கொள்க. எல்லைகள் $\frac{\pi}{2}$, 0

$$2x \cdot dx = -\sin\theta \cdot d\theta \quad \therefore \quad dx = -\frac{\sin\theta \cdot d\theta}{2\sqrt{\cos\theta}}$$

$$\therefore \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \cdot x^2 \cdot dx = +\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \times \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta}{2\sqrt{\cos\theta}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \sqrt{\cos\theta}\;\frac{2}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\, \phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{\theta}{2}\,\sqrt{\cos\theta} \cdot d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)\sqrt{\cos\theta} \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\cdot d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}}\theta\cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}-1}\theta\cdot d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{5}{2}-1}\theta\cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{7}{4})}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left[\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})} + \frac{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{3}{4}\Gamma(\frac{3}{4})}\right]$$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{[3\,\{\Gamma(\frac{3}{4})\}^2 + \frac{1}{4}\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2]}{3\Gamma(\frac{1}{4})\times\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{12}\,\frac{[\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2 + 12\,\{\Gamma(\frac{3}{4})\}^2]}{\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(1-\frac{1}{4})}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{12}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\pi}[\{\Gamma(\tfrac{1}{4})\}^2 + 12\,\{\Gamma(\tfrac{3}{4})\}^2]$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{2\pi}}[\{\Gamma(\tfrac{1}{4})\}^2 + 12\,\{\Gamma(\tfrac{3}{4})\}^2]$$

எ. கா. 8

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}} \times \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$ எனக் காட்டுக.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}$$

$x^4 = u$ எனில், $4x^3\cdot dx = du$, $\quad dx = \dfrac{du}{4\cdot u^{\frac{3}{4}}}$

$$\therefore\ I_1 = \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{(1-u)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{du}{4 \cdot u^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4}\int_0^1 u^{-\frac{1}{4}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^1 u^{\frac{3}{4}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1} \cdot du = \tfrac{1}{4}\,\beta\left(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ I_1 = \tfrac{1}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{4})}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \frac{du}{4u^{\frac{3}{4}}(1+u)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^1 \frac{u^{-\frac{3}{4}} \cdot du}{(1+u)^{\frac{1}{2}}}$$

இங்கு $m-1 = -\frac{3}{4} \quad \therefore \quad m = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
$m+n-1 = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad n = \frac{1}{2}+\frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

$$\therefore\ I_2 = \frac{1}{4}\,\beta\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{3}{2})}$$

$$\therefore\ I_1 \times I_2 = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{4})} \times \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{1}{16}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{4}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{2})}$$

ஆனால்,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad \ldots\ \ldots \text{(i)}$$

$\Gamma(m)\,\Gamma(m+\frac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\,\Gamma(2m)$ என்பதில்

$m = 1$ என்றிட

$$\Gamma(1)\,\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma(2)$$

$$i.e.\ \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \because \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

$$\therefore I_1 \times I_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \sqrt{\pi}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{1}{8}\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(1 - \tfrac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

மாற்று முறை.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2 \cdot dx}{(1 - x^4)^2}$$

இங்கு $x^2 = \sin\theta$ என்றிட எல்லைகள் $0, \frac{\pi}{2}$

$$2x \cdot dx = \cos\theta \cdot d\theta, \quad x = \sqrt{\sin\theta}.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta \cdot d\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}-1}\theta \cdot d\theta, \quad p = \frac{3}{2}$$

ஆனல்,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}\theta \cdot d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}$$

இங்கு $x^2 = \tan\theta$ என்க, எல்லைகள் $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$$2x\cdot dx = \sec^2\theta\cdot d\theta, \quad x = \sqrt{\tan\theta}.$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta\cdot d\theta}{\sec\theta\cdot 2\sqrt{\tan\theta}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos\theta}\cdot d\theta}{\cos\theta\cdot\sqrt{\sin\theta}}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{2\cdot\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2\theta)^{-\frac{1}{2}}\cdot d\left(\frac{2\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}}\phi\cdot d\phi; \quad \phi = 2\theta.$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(\frac{1}{2}-1)}\phi\cdot d\phi; \; p = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$\therefore \quad I_1 \times I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})} \times \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$= \frac{\pi}{16\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})} = \frac{\pi}{16\sqrt{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

பயிற்சிகள் 49

நிறுவுக.

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^6)^{\frac{1}{6}}} = \frac{\pi}{3}$$

2. $$\int_0^1 \sqrt{1-x^4} \cdot dx = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

3. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{4\sqrt{2\pi}}$$

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta)d\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2a^m \cdot b^n \cdot \Gamma(m+n)}$$

மதிப்பிடுக.

5. $\Gamma(\frac{1}{7}) \cdot \Gamma(\frac{2}{7})\,\Gamma(\frac{3}{7})\,\Gamma(\frac{4}{7}) \cdot \Gamma(\frac{5}{7})\,\Gamma(\frac{6}{7})$

6. $$\int_0^\infty \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}\,dx$$

7. $$\int_0^1 x^p(1-x^q)^n \cdot dx$$

நிறுவுக.

8. $$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^{\frac{1}{n}}\right)^{2n}} = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}$$

9. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{2^{\frac{2-n}{n}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{n\,\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

10. (i) $\beta(m, m)\,\beta(m+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2})$
$= \pi m^{-1} \cdot 2^{1-4m}$

(ii) $\beta(n, n) = 2^{1-2n}\,\beta(n, \frac{1}{2})$

(iii) $\Gamma(\frac{1}{4}) \cdot \Gamma(\frac{3}{4}) = \sqrt{2}\,\pi$

11. (a) $$\int_0^\infty \sqrt{y} \cdot e^{-y^2} \cdot dy \times \int_0^\infty \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{y}} \cdot dy$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(b) $$\int_0^\infty x \cdot e^{-x^8} \cdot dx \times \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x^4}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{16\sqrt{2}}$$

12. $$\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot dx\right\}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p+1} x \cdot dx\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2(p+1)}$$ எனக் காட்டுக.

17. பன் மாறித் தொகையீடுகள் (Multiple Integrals)

§ 71. பன்முறைத் தொகையீடு (Repeated Integration)

x-ஐச் சார்ந்து $f(x)$-ன் வரையறுக்கப்படாத தொகையீட்டை, ஒரு மாறிலியைச் சேர்த்து, $F(x) + C_1$ என்கிறோம்.

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C_1 \qquad \ldots(1)$$

இங்கு $F(x)$, x-ன் சார்பாதலால், அதற்கும் தொகையீடு காணலாம். அப்போது பிறிதொரு மாறிலியும் சேரும்.

$$\int \left[F(x) + C_1 \right] dx = G(x) + C_1 x + C_2.$$

இவ்விருமுறைத் தொகையீட்டை

$$\int \left[\int f(x)\, dx \right] dx = \int \int f(x) \cdot dx \cdot dx$$

$$\int \int f(x) \cdot dx^2 \ \ldots (2)$$

என எழுதலாம். இதுபோலவே, மும்முறைத் தொகையீட்டை,

$$\int \{ \int [\int f(x)\, dx]\, dx \}\, dx = \int\int\int f(x) \cdot dx \cdot dx \cdot dx.$$

$$= \int\int\int f(x)\, dx^3 \text{ எனவும்} \qquad \ldots (3)$$

n-முறைத் தொகையீட்டை,

$$\int\int\int \ldots\ldots\ldots \int f(x)\, dx^n \text{ எனவும் எழுதலாம்.} \qquad \ldots (4)$$

(2), (3), (4) இவற்றைப் பன்முறைத் தொகையீடுகள் (Repeated integrals) என்கிறோம்.

வரையறைத் தொகையீடு என்பது ஒரு தொடரின் கூட்டுத் தொகையின் எல்லை என்ற பொருளில், பன்முறைத் தொகையீடு (Repeated Integral) பன்மாறித் தொகையீடு (Multiple Integral) என்றும் வழங்கப்படுகிறது. இருமுறை தொகையிடுவதை இரு மாறித் தொகையீடு (Double Integral) என்றும், மும்முறை தொகை யிடுவதை மும்மாறித் தொகையீடு (Triple Integral) என்றும் கூறுகிறோம்.

எ. கா. 1.

$\int\int \cos 3x \cdot dx \cdot dx$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\int\int \cos 3x \cdot dx \cdot dx = \int \left[\int \cos 3x \cdot dx \right] dx.$$

$$= \int \left(\frac{\sin 3x}{3} + C_1 \right) dx$$

$$= -\tfrac{1}{9} \cos 3x + C_1 x + C_2$$

எ. கா. 2.

$\int\int\int (x^2 + e^{-2x}) \cdot dx^3$-ன் மதிப்பென்ன ?

$$\int\int\int (x^2 + e^{-2x})\, dx^3 = \int\int \left[\frac{x^3}{3} - \frac{e^{-2x}}{2} + C_1 \right] dx^2$$

$$= \int \left[\frac{x^4}{12} + \frac{e^{-2x}}{4} + C_1 x + C_2 \right] dx$$

$$= \frac{x^5}{60} - \frac{e^{-2x}}{8} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

§ 72. வரையறுத்த பன்மாறித் தொகையீடுகள் (Definite Multiple Integrals)

தொகுபடும் சார்பு ஒரு மாறி கொண்டது.

$$\int_c^d \int_a^b f(x) \cdot dx^2.$$

இங்கு a, b, c, d மாறிலிகள்.

தொகையிடும் முறை: உள்ளிருந்து வெளியே முறையாகத் தொகையிடவேண்டும். (a, b) எல்லைகளில் $f(x)$-சார்பின் x-ஐ யொட்டிய வரையறுத்த தொகையீட்டை முதலில் கண்டு, பிறகு இம்மாறிலிக்கு x-ஐ யொட்டி (c, d) எல்லைகளில் வரையறுத்த தொகை காணவேண்டும்.

எ. கா.

மதிப்பிடுக.

$$\int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x)\, dx^2$$

$$\int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x) \cdot dx^2$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + \cos x \right)_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) dx$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \int_1^2 dx = \left(\frac{\pi}{8} - 1 \right) \left(x \right)_2^1$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - 1$$

குறிப்பு, இங்கு $\int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x)\, dx^2$, ஐ

$\int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t - \sin t) \cdot dt \right] dw$ என்று கொண்டு முறையாகத்

தொகையிடினும் ஒரே மதிப்பு $\frac{\pi^2}{8} - 1$ வருவதைக் காணலாம். எனவே மாறிகளை மாற்றுவதால் தொகையின் மதிப்பு மாருது.

$$\therefore \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x)\, dx^2$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x)\, dx \cdot dy$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y - \sin y)\, dy \cdot dx$$

§ 73. ஒன்றுக்கொன்று சார்பில்லாத (Independent) மாறிகள் (x, y) கொண்ட வரையறுத்த இருமாறித் தொகையீடு (Double Integral)

$$\int_a^b \int_{u_1}^{u_2} f(x, y)\, dy \cdot dx, \text{ அல்லது}$$

$$\int_a^b dx \int_{u_1}^{u_2} f(x, y) \cdot dy$$

இங்கு a, b மாறிலிகள்; u_1, u_2 மாறிலிகள் அல்லது x-ன் சார்புகள்.

தொகையிடும் முறை: முதலில் x-ஐ ஒரு மாறிலியாகக் கருதி $\int_{u_1}^{u_2} f(x, y)\, dy$ என்ற வரையறைத் தொகையை u_1, u_2 எல்லைக்குள் காணவேண்டும். இத்தொகை ஒரு x-ன் சார்பாக இருக்கும். இச்சார்பு $F(x)$ எனில், அடுத்து, $\int_a^b F(x)\, dx$ என்ற வரையறைத் தொகையை மதிப்பிட வேண்டும்.

அதுபோலவே, c, d மாறிலிகளாகவும், v_1, v_2 y-ன் சார்புகளாகவும் உள்ளதானுல்,

$$\int_c^d \int_{v_1}^{v_2} f(x, y)\, dx \cdot dy$$ அல்லது

$$\int_c^d dy \int_{v_1}^{v_2} f(x, y)\, dx$$ என எழுதி, y-ஐ ஒரு

மாறிலியாகக் கருதி x-ஐயொட்டி உள்தொகையீட்டை v_1, v_2 எல்லைக்குள் காணவேண்டும். வந்த மதிப்பு y-ன் சார்பாக இருக்கும். இதை c, d எல்லைக்குள் y-ஐயொட்டித் தொகையிட வேண்டும்.

அதாவது, $$\int_{v_1}^{v_2} f(x, y)\, dx = G(y)$$ என்றால்

$$\int_c^d \int_{v_1}^{v_2} f(x, y)\, dx \cdot dy = \int_c^d G(y)\, dy.$$

குறிப்பு : (1) எல்லைகளெல்லாம் மாறிலிகளானல் வெளியி லிருந்து உள்ளே முறையாகத் தொகையிட்டாலும் மதிப்பு மாருது.

எ. கா. 1.

$$\int_0^b \int_0^a x^2 \cdot y \cdot dx \cdot dy$$

$$I = \int_0^b \frac{a^3 \cdot y}{3} \cdot dy = \left[\frac{a^3}{3} \cdot \frac{y^2}{2}\right]_0^b$$

$$= \frac{a^3 \cdot b^2}{6}$$

அல்லது $$I = \int_0^a x^2 \cdot \frac{b^2}{2} \cdot dx = \frac{a^3 b^2}{6}$$

குறிப்பு: (2) உள் தொகையீட்டின் எல்லைகள் மாறிகளானால் தொகையீட்டு முறையை வெளியிலிருந்து உள்ளாக மாற்றக் கூடாது.

எ. கா. 1.

$$\int_0^1 \int_0^y (x + y^2)\, dx \cdot xy$$

$$= \int_0^1 [\int_0^y (x + y^2)dx]\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + y^2 \cdot x\right)_{x=0}^{x=y} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + y^3\right)dx = \left[\frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

எ. கா. 2

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} xy \cdot dy \cdot dx$$

$$= \int_0^2 [\int_0^{x^2} xy \cdot dy \cdot]dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x \cdot y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=x^2} \cdot dx = \int_0^2 \left(\frac{x \cdot x^4}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^5 \cdot dx = \frac{2^6}{12} = \frac{16}{3}$$

எ. கா. 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{a\sin\theta} \frac{r \cdot dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\int_0^{a\sin\theta} \frac{r\ dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{a\sin\theta} d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{6}} (a\ \cos\theta - a)\ d\theta$$

$$= -\quad a\ (\sin\ \theta)_0^{\frac{\pi}{6}} + a\ (\theta)_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= a\left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right] = \frac{a}{6}\ (\pi - 3)$$

எ. கா. 4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos 2\theta + b\sin 2\theta)\ d\theta \cdot d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos 2\theta + b\ \sin 2\theta \Big|\ d\theta \right] d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{a}{2}\ \sin 2\theta - \frac{b}{2}\cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{a}{2}(0-0) - \frac{b}{2}(-1-1)\right] d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \cdot d\phi = b \cdot (\phi)_0^{\frac{\pi}{2}} = b\,\frac{\pi}{2}.$$

எ. கா. 5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\tan x} \left(1 + \frac{1}{1+y^2}\right) dy \cdot dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_0^{\tan x} \left(1 + \frac{1}{1+y^2}\right) dy \right] dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (y + \tan^{-1}y)\Big|_{y=0}^{y=\tan x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan x + x)\, dx = \left[\log \sec x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \log 2 + \frac{\pi^2}{18}$$

எ. கா. 6

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{\cos 2\theta}^{1} \frac{dr\, d\theta}{\sqrt{2+2r}}$$

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left[\int_{\cos 2\theta}^{1} \frac{dr}{\sqrt{2}\sqrt{1+r}} \right] d\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 \left(+ \sqrt{1+r} \right)_{r=\cos 2\theta}^{r=1} \right] d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left(\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos 2\theta} \right) d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left(\sqrt{2} - \sqrt{2} \cos\theta \right) d\theta$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3} - 1$$

பயிற்சிகள் 50

மதிப்பு காண்க :

1. $\int_{0}^{3} \int_{1}^{2} xy\,(x + y) \cdot dx \cdot dy$

2. $\int_{0}^{a} \int_{0}^{b} (x^2 + y^2)\, dx \,.\, dy$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{a\cos\theta} r^4 \cdot dr \cdot d\theta$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\ dx \cdot dy$

5. $\int_0^a \int_0^b \frac{xy \cdot dx \cdot dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

6. $\int_1^2 \int_0^x \frac{dx \cdot dy}{(x^2+y^2)}$ 7. $\int_2^a \int_2^b \frac{dx \cdot dy}{xy}$

8. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\ dx \cdot dy$

9. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{dx \cdot dy}{\sqrt{a^2-x^2}}$

10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\theta$

11. $\int_0^1 \int_y^{2y} e \cdot {}^{x-y}\ dx\ dy$

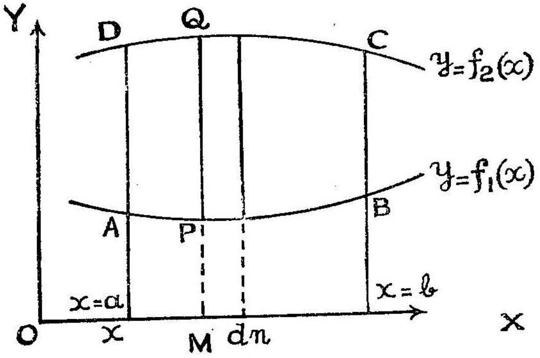
12. $\int_0^2 \int_1^{e^x} \frac{x}{y} \cdot dy \cdot dx$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \sin 2\theta} r^3 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot dr \cdot d\theta$

14. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} \frac{r\,dr\,d\theta}{(r^2+a^2)^2}$

§ 74. இரு மாறித் தொகையீடு வடிவ கணித விளக்கம்

(i) $$I_1 = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy \cdot dx$$



படம் 79

இங்கு

தொகுபடும் சார்பு $f(x, y)$. தொகையீட்டின் வெளி (Region) $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ என்ற வளைவரைகள் $x = a$, $x = b$ என்ற குத்தாயங்கள் இவற்றிற்கிடைப்பட்ட பரப்பு.

படத்தில் $y = f_1(x)$ வளைவரை APB

$y = f_2(x)$ வளைவரை DQC

பரப்பு $ABCD$ யை y-அச்சுக்கு இணையாக வரைந்த dx அகலமும் PQ நீளமுமுள்ள, நுண் நீள் சதுரங்களாக்குக.

$OM = x$ ஐ நிலையாக வைத்து PQ ஓரமாக P யிலிருந்து Q வரையிலும் தொகையிட

$$\sum f(x, y)\, dy = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy$$

கிடைத்த தொகையீட்டை dx-ஆல் பெருக்க

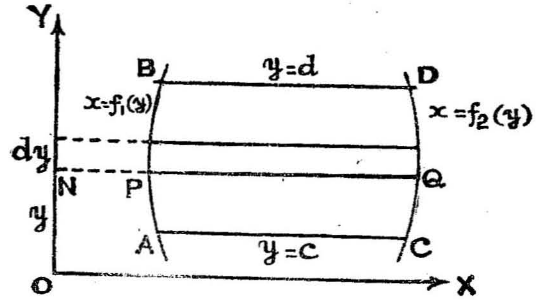
$$\left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) \cdot dy \right] dx \text{ ஆகும்.}$$

நீள் சதுரத்தை AD யிலிருந்து BC வரையிலும் நகர்த்த $ABCD$ என்ற வெளியில் கிடைக்கும் தொகைகளின் கூடுதல்

$$= \sum_{x=a}^{x=b} \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

$$I_1 = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy \cdot dx$$

$$I_2 = \int_c^d \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y)\, dx \cdot dy$$



படம் 8)

இங்கு,

தொகையீட்டின் வெளி : $x = f_1(y)$

$x = f_2(y)$

என்ற வளைவரைகள் ; $y = c$ $y = d$ என்ற x-அச்சுக்கு இணையான கோடுகள், இவற்றிற்கிடைப்பட்ட வெளி

படத்தில் :

$$x = f_1(y) \text{—வளைவரை } APB$$

$$x = f_2(y) \text{—வளைவரை } CQD$$

பரப்பு $ACDB$யை x-அச்சுக்கு இணையாக வரைந்த dy-அகலமுள்ள நுண் நீள் சதுரங்களாக்குக.

$ON = y$, y-ஐ நிலையாக வைத்து, PQ ஓரமாக P-யிலிருந்து Q-வரையிலும் தொகையிட,

$$\Sigma f(x, y)\, dx = \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y)\, dx.$$

வந்த தொகையீட்டை dy-ஆல் பெருக்க

$$\left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) \cdot dx\right] dy \text{ ஆகும்.}$$

PQ-யை AC-யிலிருந்து BD-வரையிலும் உயர்த்திச் செல்ல $ACBD$ வெளியில் கிடைக்கும் தொகைகளின் கூடுதல்

$$= \sum_{y=c}^{y=d} \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y)\, dx\right] dy$$

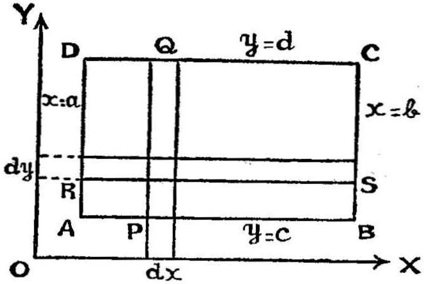
$$I_2 = \int_c^d \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) \cdot dx\, dy.$$

குறிப்பு : I_1, I_2 இவற்றில் முறையே $y = c$, $y = d$, $x = a$, $x = b$ என மாறிலிகளாக எல்லா எல்லைகளும் இருந்தால்,

$$I_1 = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy \cdot dx \quad \ldots\ldots \text{ (i)}$$

$$I_2 = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx \cdot dy. \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$ எனவாகும்.

அப்போது, தொகையீடு காணும் வெளி கீழே படத்தில் கண்ட படி *ABCD* என்ற நீள் சதுரமாகும். தொகையீடு I_1 காண, முதலில் நெடுக்கைப் பகுதி (Vertical strip) *PQ*-யின் ஓரமாகத் தொகை கண்டு *dx*-ஆல் பெருக்கி வந்த மதிப்பை *AD*-யிலிருந்து



படம் 81.

BC-வரையிலும் நகர்த்தித் தொகையீடு செய்ய வேண்டும். அது போலவே I_2 காண, கிடைக்கைத்துண்டு (Horizontal strip) *RS* ஓரமாகத் தொகை கண்டு, *dy*-ஆல் பெருக்கி வந்த மதிப்பை *AB* யிலிருந்து *DC* வரையிலும் உயர்த்தித் தொகையீடு செய்ய வேண்டும்.

இங்கு $I_1 = I_2$ என்பது தெளிவு.

எனவே,

எல்லைகளெல்லாம் மாறிலிகளானல் இரு மாறித் தொகையீட்டில் இரு முறைகளில் கிடைக்கும் மதிப்புகளும் ஒன்றேயாதலால் எம் முறையேனும் தொகையிடலாம்.

எ. கா.

$\int \int xy\, dx \cdot dy$ என்ற இரு மாறித் தொகையீட்டை நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் மிகை நாற் கவசப் பகுதியில் மதிப்பிடுக.

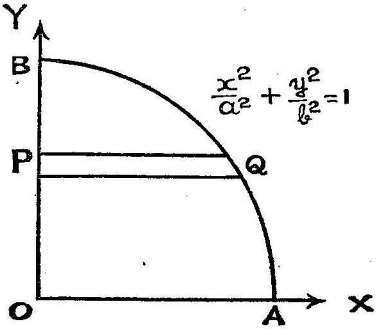
$\int xy \cdot dx$ *PQ*-யின் ஓரமாகக் காணும் தொகை.

∴ எல்லைகள்

$$x = 0, \; x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

பிறகு, PQ-வை OX-லிருந்து B-வரை உயர்த்தவேண்டும்.
$y = 0, \; x = b.$

எல்லைகள்



படம் 82.

$$I = \int_0^b \int_0^{a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} xy \cdot dx \cdot dy$$

$$I = \int_0^b \left[\int_0^{a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} xy \cdot dx \right] dy.$$

$$= \int_0^b y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} \cdot dy \qquad = a^2 \int_0^b \frac{y}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot dy$$

$$= \frac{a^2}{2b^2} \int_0^b (b^2 y - y^3) \, dy$$

$$= \frac{a^2}{2b^2} \left[b^2 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^b = \frac{a^2}{2b^2} \times \frac{b^4}{4} = \frac{a^2 b^2}{8}$$

பயிற்சிகள் 51

1. $\int\int dx\, dy$-ஐக் கீழ்க்கொடுத்தபடி மதிப்பிடுக.

(i) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \le 1$ (a, b மிகை எண்கள்) என்ற வெளியில்

(ii) $x^2 + y^2 \le a^2$ என்ற வெளியில்

2. $\int\int xy\, dx \cdot dy$ என்பதை

(i) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, அச்சுகளின் மிகை நாற்கூறுப் பகுதி (positive quadrant) வெளியில்,

(ii) $x^2 + a^2 = a^2$ வட்டத்தின் மிகை நாற்கூறுப் பகுதியில்

(iii) அச்சுகள், $x = a$, $x = b$ குத்தாயங்கள் இவற்றிற்கிடைப்பட்ட வெளியில் மதிப்பிடுக.

3. $\int\int (x^2 + y^2)\, dx \cdot dy$ என்பதை

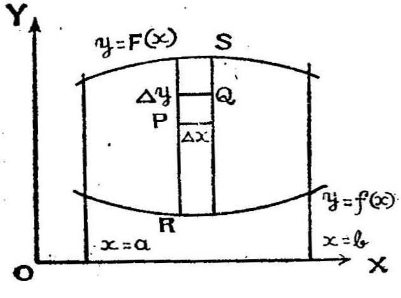
(i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் பரப்பின் மேல்

(ii) $x + y = 1$ அச்சுகளின் மிகை நாற்கூறுப் பகுதியில் (positive quadrant) அடைபடும் பரப்பின் மேல், மதிப்பிடுக.

§ 75. இருமாறித் தொகையீட்டின் பயன்கள் (Applications)

1. பரப்பளவு காணல் :

(a) தெக்காட்டின் அச்சுத் தொலைவுகளில் (Cartesian Co-ordinates).



படம் 83

$y = F(x)$, $y = f(x)$ என்ற வளைவரைகளுக்கும், $x = a$ $x = b$ என்ற குத்தாயங்களுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பளவைக் காண வேண்டுமாயின், படத்தில் கண்டதுபோல்,

பரப்பை $\triangle x$ அகலமுள்ள நுண்ணிய நெடுக்கை (Vertical)த் துண்டுகளாகப் பிரித்திடுக. அதனுள் P, Q புள்ளிகள் முறையே (x, y), $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ ஆயத் தொலைவுகளைக் குறிக்கட்டும்.

நுண்ணிய நீள்சதுரம் PQ-யின் பரப்பு $= \triangle x \cdot \triangle y$.

$$\therefore \text{ நீள் சதுரம் } RS\text{-ன் பரப்பு} = \underset{\triangle y \to 0}{\text{எல்லை}} \sum (\triangle x \cdot \triangle y)$$

நீள்சதுரம் RS-ல் அடங்கியுள்ள நுண்ணிய நீள் சதுரங்களின் அகலம் $\triangle x$. அவற்றின் உயரங்களின் எல்லைகள் $y=f(x)$-லிருந்து $y=F(x)$ வரையிலுமுள்ளது. வரையறுத்த தொகையீடானது ஓர் ஒருங்கும் கூட்டுத் தொடரின் கூடுதலின் எல்லை, என்ற அடிப்படை விதிப்படி

$$RS\text{-ன் பரப்பு} = \triangle x \underset{\triangle y \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{f(x)}^{F(x)} \triangle y$$

$$= \triangle x \int_{f(x)}^{F(x)} dy$$

இப்போது, $x=a$, $x=b$ எல்லைக்குள் அடங்கிய, RS போன்ற எல்லா நெடுக்கைத் துண்டுகளையும் ஒன்றுகச் சேர்த்துத் தொகை கண்டால் வேண்டிய பரப்பளவு கிடைக்கும்.

$$\text{பரப்பளவு} = \underset{\triangle x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{x=a}^{x=b} \triangle n \cdot \int_{f(x)}^{F(x)} dy$$

$$= \int_a^b dx \int_{f(x)}^{F(x)} dy$$

$$= \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{F(x)} dy \right] dx.$$

$$= \int_a^b \int_{f(x)}^{F(x)} dy \cdot dx$$

கிளை :

$x = \phi(y), x = \psi(y)$ என்ற வளைவரைகளுக்கும், $y = c$, $y = d$ என்ற கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு

$$\int_c^d \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} dx \cdot dy$$ என்று காணலாம்.

எ. கா. 1.

இருமாறித் தொகையீட்டில் $y = \dfrac{16}{x^2 + 4}$, $y = \dfrac{x^2}{4}$ என்ற வளைவரைகளுக்கும் $x = 0$, $x = 2$ என்ற கோடுகளுக்குமிடைப் பட்ட பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

$$\text{பரப்பளவு} = \int \int dy \cdot dx$$

$$= \int_0^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{16}{x^2+4}} dy \cdot dx,$$ பரவளைவு. $y = \dfrac{x^2}{4}$

ஆதிவழியே செல்கிறது.

$$\text{பரப்பளவு} = \int_0^2 \left[\frac{16}{x^2 + 4} - \frac{x^2}{4} \right] dx$$

$$= 16 \times \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^2 - \frac{1}{4 \cdot 3} \left(x^3 \right)_0^2$$

$$= 8 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{8}{4 \cdot 3} = 2\pi - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{2} (3\pi - 1)$$

எ. கா. 2.

$xy = 4,\ 2x = 5 + 4y - y^2,\ y = 4$ இவற்றிற்கு இடைப் பட்ட பரப்பைக் காண்க.

இங்கு வளைவரைகள் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண $xy = 4$, $2x = 5 + 4y - y^2$ என்றவற்றிலிருந்து

$$2xy = y(5 + 4y - y^2) = 8$$

$$5y + 4y^2 - y^3 = 8$$

$$f(y) = y^3 - 4y^2 - 5y = 8 = 0$$

$$f(1)\, 0 \quad \therefore \quad y = 1,\ x = 4$$

$\therefore$ எல்லைகள் $x = \frac{4}{y}, x = \frac{5 + 4y - y^2}{2};\quad y = 1,\ y = 4$

$$\therefore \text{ பரப்பளவு } = \int_1^4 \int_{\frac{4}{y}}^{\frac{5+4y+y^2}{2}} dx \cdot dy$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{5}{2} + 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{4}{y}\right) dy$$

$$= \frac{5}{2}(4 - 1) + \frac{2}{2}(16 - 1) - \frac{1}{6}(64 - 1) - 4(\log 4).$$

$$= 12 - 8 \log 2.$$

பயிற்சி 52

இருமாறித் தொகையீட்டு முறையில் கொடுத்துள்ள வரம்பு களுக்குட்பட்ட பரப்பளவுகளைக் காண்க.

1. பரவளைவுகள் $3x^2 = 2y,\ y^2 = 18x$.
2. பரவளைவு $y = 3 - x^2$, $y = x + 1$ என்ற கோடு.

3. பரவளைவு $y^2 = 9 - 9x$, $x^2 + y^2 = 9$ என்ற வட்டத்தின் இடதுபாதி.

4. பரவளைவு $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$ என்ற வட்டத்தின் வலதுபாதி.

5. $y = \frac{4}{x^2 + 3}$, $x^2 + y^2 - 2y = 0$ வட்டத்தின் மேல்பாதி.

6. $xy = 4$, $x = 9 - y^2$ என்ற வளைவரைகள் $y = 1$, $y = 2$ என்ற கோடுகள்

7. $x = 1$ என்ற கோட்டிற்கும் $y = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$, $x^2 + y^2 = 4$ என்ற வளைவரைகளின் அச்சுகளின் முதல் நாற்கூறுப் பகுதியில் (First quadrant) உள்ள பாகங்கள்.

8. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற வளைவரைகளின் அச்சுகளின் முதல் நாற்கூறுப் பகுதியிலுள்ள பாகம்.

9. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $y^2 = \frac{x^3}{2ax - x}$ என்பனவற்றின் அச்சுகளின் முதல் நாற்கூறுப் பகுதியின் பாகங்கள்.

§ 76. ஒரு சமதளப்பரப்பின் புவிக் கவர்ச்சி மையமும் நிலை கெம்புத்திறனும் (C. G. and M. I. of a plane Area)

1. ஒருமெல்லிய தகட்டின் நிறை (Mass) காணல் :

தகட்டின் அடர்த்தி (x, y) என்ற ஒரு புள்ளியில் x, y களின் சார்பு $f(x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

புள்ளி (x, y) யில் நுண்பரப்பு $= dx \cdot dy$

$$\therefore \quad \text{நுண் நிறை} = \rho \cdot dx \cdot dy$$

$$\therefore \quad \text{பரப்பின் நிறைத் தொகை} = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \rho \cdot dy \cdot dx$$

$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} f(x, y)\, dy \cdot dx$$

2. சமதளப்பரப்பின் பு. க. மையம் (C. G. of plane lamiana)

(x, y) என்ற புள்ளியில் பரப்பின் நிறை $= \rho \cdot dx \cdot dy$

தகட்டின் பு. க. மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனில்

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \rho \cdot x \cdot dy \cdot dx}{\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \rho \cdot dy \cdot dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \int \rho \cdot y \, dy \, dx}{\int \int \rho \, dy \cdot dx}$$

என்ற வாய்பாடுகளை ஒருமாறி வரையறைத் தொகையீடுகளில் பு.க. மையங்காணுங்கால் விளக்கினோம்.

3. நி. நெ. தி. ($M. I.$)

OX-ஐ யொட்டி நி. நெ. தி $I_x = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \rho \, y^2 \cdot dy \cdot dx$

OY-ஐ யொட்டி நி. நெ. தி $I_y = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \rho \, x^2 \cdot dy \cdot dx$

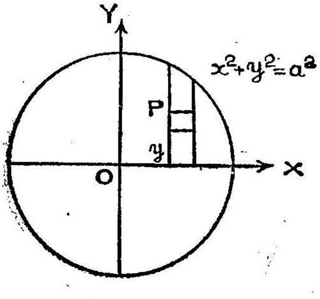
OZ-ஐ யொட்டி நி. நெ. தி $I_z = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$

$$= I_x + I_y$$

இவ்வாய்பாடுகளும் ஒருமாறி வரையறைத் தொகையீட்டில் அறிந்தவையாகும்.

எ. கா. 1.

1. வட்டத் தகட்டின் அடர்த்தி ஒரு புள்ளியில் குறிப்பிட்ட ஒரு விட்டத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கு நேர் விகிதமென்றால் வட்டத்தகட்டின் நிறையைக் காணவும்.



படம் 84

குறிப்பிட்ட விட்டத்தை X-அச்சாகக் கொண்டால் வட்டம் $x^2 + y^2 = a^2$.

$$\therefore \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$\rho = ky^2$, k-ஒரு மாறிலி.

$$\triangle A = dx \cdot dy$$

$$\therefore \quad \triangle m = \rho \cdot dx \cdot dy = ky^2\, dx \cdot dy$$

$$\therefore \quad M = 4 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} k \cdot y^2\, dy \cdot dx.$$

$$= 4k \int_0^a \left(\frac{y^3}{3}\right)_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \frac{4k}{3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

$x = a \sin\theta$ எனப்பிரதியிட,

$dx = a \cos\theta \cdot d\theta$.

$$M = \tfrac{4}{3}\, k \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cdot \cos^3\theta \cdot a \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\, k\, a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \cdot d\theta = \frac{4}{3}\, k\, a^4\, \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi\, k\, a^4}{4}$$

எ. கா. 2.

பரவளைவு $y = 2x^2 - 8x + 5$, கோடு $y = 2x - 3$ இவற்றிற்கிடைப்பட்ட பரப்பின் பு. க. மையம் காண்க.

சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க,

$$2x^2 - 8x + 5 = 2x - 3$$

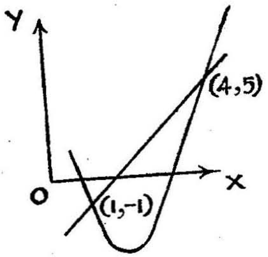
$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0 \qquad \therefore \quad x = 1, \quad x = 4$$

$$y = -1, \quad y = 5.$$

$\therefore$ பரவளைவும், கோடும் $(1, -1)$, $(4, 5)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.



படம் 85

தொகையீடு செய்யும் எல்லைகள்

$$x = 1, \; x = 4$$

$$y = 2x^2 - 8x + 5$$

$$y = 2x - 3$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ பரப்பின் பு. க. மையமெனில்

$$\bar{x} = \frac{\int\int x \cdot dy \cdot dx}{\int\int dy \cdot dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\int\int y \cdot dy \cdot dx}{\int\int dy\, dx}$$

$$\text{பரப்பு } A = \int_1^4 \int_{2x^2-8x+5}^{2x-3} dy \cdot dx$$

$$= \int_1^4 \left[(2x - 3) - (2x^2 - 8x + 5 \right] dx$$

$$= \left[-2\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^2}{2} - 8x \right]_1^4 = 9$$

$$9 \cdot \bar{x} = \int_1^4 \int_{2x^2-8x+5}^{2x-3} x\, dy \cdot dx$$

$$= \int_1^4 x \left[(2x - 3) - (2x^2 - 8x + 5 \right] dx.$$

$$= \int_1^4 x\,(-2x^2 + 10x - 8)\,dx$$

$$= \int_1^4 (-2x^3 + 10x^2 - 8x)\,dx. = \frac{45}{2}$$

$$\therefore\quad \bar{x} = \frac{45}{2 \times 9} = \frac{5}{2}$$

$$9\,\bar{y} = \int_1^4 \int_{2x^2-8x+5}^{2x-3} y\cdot dy\cdot dx$$

$$= \int_1^4 \tfrac{1}{2}\,[(2x-2)^2 - (2x^2 - 8x + 5)^2]\,dx$$

$$= \frac{9}{5} \qquad \therefore\quad \bar{y} = \frac{1}{5}.$$

∴ பு.க. மையம் $(\frac{5}{2}, \frac{1}{5})$

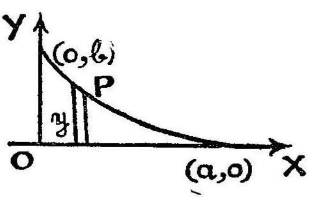
எ. கா. 3.

$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ என்ற வடிவத்திலுள்ள ஒரு தகட்டின் அடர்த்தி $\rho = K\cdot xy$ எனவுளது. அதன் நாற்கூறுப் பகுதியின் பு. க. மையம் காண்க.

பரப்பு

$$A = \int\int \rho\cdot dy\cdot dx$$

$$= \int_0^a \left[\int_0^y K\,xy\cdot dy\right] dx$$



படம் 86

$$= \int_0^a K x \cdot \frac{y^2}{2} \cdot dx$$

$x = a \cos^3\theta, \quad y = b \sin^3\theta$ எனில்

$$A = -\frac{k}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a \cos^3\theta \cdot b^2 \sin^6\theta \cdot 3 \cdot a \cos^2\theta \cdot \sin\theta \, d\theta.$$

$$= \frac{3Ka^2b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta \cdot \cos^5\theta \cdot d\theta = \frac{3Ka^2b^2}{2}, I_{7,5}$$

$$A \cdot \bar{x} = \int \int \rho \cdot x \cdot dy \cdot dx$$

$$= \int_0^a \int_0^y \cdot k x^2 y \cdot dy \cdot dx$$

$$= \int_0^a k x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \cdot dx$$

$$= -\frac{k}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \cdot \cos^6\theta \cdot b^2 \sin^6\theta \cdot 3 a \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta.$$

$$= \frac{+3k a^3 \cdot b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta \cdot \cos^8\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{3ka^3b^2}{2} \cdot I_{7,8}.$$

$$\bar{x} = \frac{3\frac{k}{2}a^3 b^2 . \Gamma 7, 8}{3\frac{k}{2} a^2 b^2 . \Gamma 7 . 5} = \frac{\Gamma 7, 8}{\Gamma 7, 5} \cdot a$$

$$= \frac{128}{429} a.$$

அதுபோலவே $\bar{y} = \frac{128}{429} b$

$\therefore$ பு. க. மையம் $= \left(\frac{128}{429} a, \frac{128}{429} b \right)$

எ. கா. 4.

$\int\int x^2 \, dx \cdot dy$ தொகையீட்டை $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் பரப்பில் மதிப்பிடுக. அதனின்று $\int\int r^2 \, dx \cdot dy$-ன் தொகையீட்டின் மதிப்பை $r^2 = x^2 + y^2$ என்ற பரப்பின்மேல் கணக்கிடுக.

இத்தொகையீடுகள் எதைக் குறிக்கின்றன ?

(a) முதல் தொகையீட்டை நீள்வட்டத்தின் மிகை நாற் கூறுப் பகுதியின் மேல் கண்டு நான்கு மடங்காக்குவோம்.

இத்தொகையீடு, வாய்பாட்டின்படி, y அச்சையொட்டி நீள் வட்டத்தின் நி. நெ. திறனாகும்.

$$\therefore \; Iy = \int\int x^2 \, dx \cdot dy$$

$$= 4\int_0^b \left[\int_0^{x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} x^2 \cdot dx \right] dy$$

$$= 4 \int_0^b \frac{a^3}{3} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} dy$$

$$= 4\,\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \cdot b\cos\theta \cdot d\theta, \quad y = b\sin\theta \text{ எனில்;}$$

$$= 4\,\frac{a^3 b}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^4 \cdot d\theta = \frac{4a^3 b}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi\, a^3\, b}{4}$$

இதுபோலவே நி. நெ. தி y-அச்சையொட்டி $Ix = \frac{\pi\, b^3\, a}{4}$

(b) $r^2 = x^2 + y^2$

$$\therefore \int\int r^2\, dx\cdot dy = \int\int (x^2 + y^2)\, dx\cdot dy$$

$$= \int\int x^2\, dx\cdot dy + \int\int y^2\cdot dx\cdot dy$$

$$= Iy + Ix$$

$$= \frac{\pi}{4}\, a^3\, b + \frac{\pi}{4}\, b^3 a$$

$$= \frac{\pi\, ab}{4}\,(a^2 + b^2)$$

$$= Iz$$

இது, நீள்வட்டத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அதன் பு.கூ. மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் அச்சையொட்டி நி. நெ. திறனாகும்.

பயிற்சிகள் 53

இருமாறித் தொகையீட்டில் கீழே கொடுத்துள்ள எல்லைகளி லடங்கிய பரப்புகளின் நிறை மையம் காண்க.

1. $y = 4x - x^2$, $y = x^2$ என்ற பரவளைவுகள் ;
2. பரவளைவு $y^2 = 8x$, வளைவரை $2y = x^3$;

3. பரவளைவு $y = 3 - x^2$, கோடு $y = x + 1$;

4. கோடுகள் $3y = x$, $2y = 3x$, $x = 6$;

5. பரவளைவு $y^2 = 8 - 2x$, வட்டம் $y^2 = 4x - x^2$ முதல் எண்பகுதியில்.

6. முதல் அரைக்கால் வட்டப் பகுதியில் $y = \sin x$, $2x - \pi y = 0$;

7. $y = \cos x$, y அச்சு, $y = 2$. $x = \frac{\pi}{2}$ என்ற கோடுகள்;

8. வளைவரை $y = e^x$, y அச்சு, கோடுகள் $2y = x$, $x = 2$;

கீழ்க்கண்டவற்றில் நிலைநெம்புத் திறனைக் காண்க.

9. பயிற்சி (1)லுள்ள பரப்பிற்கு y-அச்சையொட்டி

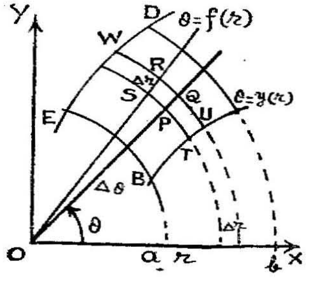
10. பயிற்சி (2)லுள்ள பரப்பிற்கு x-அச்சையொட்டி

11. பயிற்சி (3)லுள்ள பரப்பிற்கு y-அச்சையொட்டி

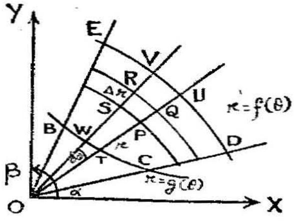
12. பயிற்சி (4)லுள்ள பரப்பிற்கு x-அச்சையொட்டி

13. பயிற்சி (2)லுள்ள பரப்பிற்கு ஆதிப் புள்ளியையொட்டி துருவ ஆயங்களில் நிலை நெம்புத் திறன் காண்க.

§ 77. கோண தூரக் கூறுகளான பரப்பு (Polar Co-ordinahes)



படம் 87 (a)



படம் 87 (b)

படம் (a)-யில் பரப்பு $BCDE$, $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$ என்ற துருவ ஆயச் சமன்பாடுகள் கொண்ட வளைவரைகளுக்கும் $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ என்ற நேர் கோடுகளுக்குமிடைப்பட்டது.

ஒன்றுக்கொன்று நுண்கோணம் $\triangle\theta$ இருக்குமாறு கணக்கற்ற ஆரைக் கோடுகள் வரைந்து α-β வைச் சம அளவுகளுள்ள பகுதிகளாக்குக. இதுபோலவே ஆதியைப் பொது மையமாகக் கொண்டு ஒன்றுக்கொன்று $\triangle r$ இடைத்தூரம் இருக்குமாறு கணக்கற்ற ஆரைகள் வரைந்து, பரப்பு $BCDE$-யை $PQRS$ போன்ற நுண் பரப்புகளாகப் பிரித்திடுக.

P, R என்ற புள்ளிகள் (r, θ), $(r+\triangle r, \theta+\triangle\theta)$ என்க, பரப்பு $BCDE$-யை A என்றும், நுண் பரப்பு $PQRS$-ஐ $\triangle A$ என்றும் குறிப்போம்.

இப்போது, $\triangle A = \frac{1}{2}(r+\triangle r)^2 \cdot \triangle\theta - \frac{1}{2} r^2 \cdot \triangle\theta$

$$\underset{\triangle\theta\to 0}{\text{எல்லை}} \triangle A = \underset{\triangle\theta\to 0}{\text{எல்லை}} \left[r\triangle r \cdot \triangle\theta + \tfrac{1}{2}(\triangle r)^2 \cdot \triangle\theta \right]$$

$= (r\triangle r)\cdot\triangle'$, முதற்படி நுண் அண்ணளவாக

OPQ, வளை வரைகளை T, U-வில் வெட்டுகின்றது. OT, OU ஆரைகளாக வரைந்த வட்டங்கள் OSR-ஐ W, V யில் வெட்டுகின்றன.

பரப்பு $TUVW$-ல் உள்ள எல்லா நுண் பகுதிகளுக்கும் $\triangle\theta$ பொது. $\therefore$ பரப்பு $TUVW$

$$= \left[\underset{\triangle r\to\theta}{\text{எல்லை}} \Sigma (r\cdot\triangle r) \right] \triangle\theta$$

$$= \left[\int_{g(\theta)}^{f(\theta)} r\,dr \right] \triangle\theta$$

அடுத்து,

$BCDE$ என்ற பரப்பு $TUVW$ போன்ற $\triangle\theta$ இடைக் கோணமுள்ள பல நுண் பகுதிகள் கொண்டது

$$\therefore \text{ பரப்பு } BCDE = \underset{\triangle\to\theta}{\text{எல்லை}} \sum_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \left[\int_{g(\theta)}^{f(\theta)} r\cdot dr \right] \triangle\theta$$

$\therefore$ வரையறைத் தொகை ஓர் ஒருங்கும் முடிவிலித் தொடரின் கூடுதலின் எல்லை என்ற அடிப்படை விதிப்படி,

$$\text{பரப்பு } BCDE = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{f(\theta)} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

படம் (*b*)-ல் $BCDE$ என்ற பரப்பு $\theta = \psi(r)$, $\theta = \phi(r)$ என்ற ஆரைக் கோடுகளுக்கும் $r = a$, $r = b$ ஆரைகளாகவும், ஆதியைப் பொது மையமாகவும் கொண்டு வரைந்த வட்டங்களுக்கும் இடைப்பட்டதாகும்.

இங்கு,

$$\text{நுண்பரப்பு } PQRS = (r \cdot \Delta\theta) \cdot \Delta r$$

$$\text{பரப்பு } TUVW = \left[\text{எல்லை}_{\Delta\theta \to 0}\ r \cdot \Delta\theta\right] \Delta r$$

$$= \left[\int_{\psi(r)}^{\phi(r)} r d\theta\right] dr$$

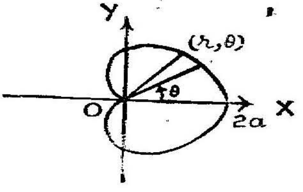
$$\text{பரப்பு } BCDE = \text{எல்லை}_{\Delta r \to 0} \sum_{r=a}^{r=b} \left[\int_{\psi(r)}^{\phi(r)} r\, d\theta\right] \Delta r$$

$$= \int_{a}^{b} \int_{\psi(r)}^{\phi(r)} r \cdot d\theta \cdot dr$$

எ. கா. 1.

நெஞ்சுவளை $r = a(1 + \cos\theta)$-ன் பரப்பை இருமாறித் தொகையீட்டில் காண்க.

$$\text{பரப்பு} = 2 \int_{0}^{\pi} \int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} r\, dr \cdot d\theta$$



படம் 88

$$= 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{r^2}{2} \right)_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta$$

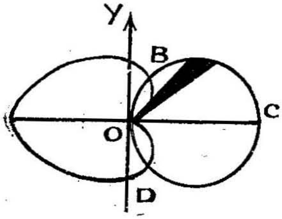
$$= \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} \cdot d\theta = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\phi \, d\phi \quad \phi = \frac{\theta}{2}$$

$$= 8a^2 \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi a^2$$

எ. கா. 2.

$r = a\cos\theta$ என்ற வட்டத்தினுள்ளேயும் $r = a(1 - \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளைக்கு வெளியேயுமுள்ள பரப்பைக் கணக்கிடுக.



படம் 89

வட்டமும் நெஞ்சு வளையமும் வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண,

$$r = a\cos\theta$$

$$r = a(1 - \cos\theta)$$

இவற்றிலிருந்து

$$a\cos\theta = a(1 - \cos\theta)$$

$$2\cos\theta = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

தொடக்கக்கோடு OX-ன் மேற்பகுதியிலுள்ள பரப்பைக்கண்டு (சமச் சீரான பண்புப்படி) அதில் இருமடங்கு காண வேண்டும்.

θ-ன் எல்லைகள் $0, \frac{\pi}{3}$

r-ன் எல்லைகள் $a(1-\cos\theta)$, $a\cos\theta$

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_{a(1-\cos\theta)}^{a\cos\theta} r \cdot dr \right] \cdot d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tfrac{1}{2} (\cos^2\theta - 1 + 2\cos\theta - \cos^2\theta)\, d\theta$$

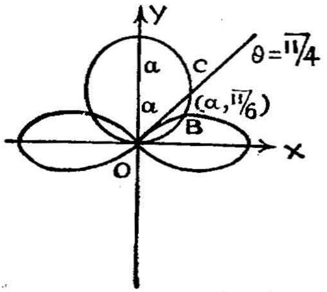
$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos\theta - 1) \cdot d\theta$$

$$= 2a^2 (\sin\theta)_0^{\frac{\pi}{3}} - a^2 (\theta)_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{3} (3\sqrt{3} - \pi)$$

எ. கா. 3.

$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ என்ற வளைவரை, (lemniscate), $r = 2a \sin\theta$ என்ற வட்டம், $\theta = \frac{\pi}{4}$ என்ற நேர்கோடு இவற்றிற்கிடைப்பட்ட பரப்பைக்காண்க.



படம் 90

வளைவரையும், வட்டமும் சந்திக்கும் புள்ளி B-யைக்காண,

$$r^2 = 2a^2 \cdot \cos 2\theta \qquad \text{(i)}$$

$$r = 2a \cdot \sin\theta \qquad \text{(ii)}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(iii)}$$

(i), (ii) லிருந்து

$$2a^2 \cos 2\theta = 4a^2 \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \sin^2\theta \quad \tan^2\theta = \frac{1}{3}; \ \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\cos^2\theta = 3 \sin^2\theta$$

$\therefore$ புள்ளி $B\left(a, \frac{\pi}{6}\right)$ ஆகும்.

$\theta = \frac{\pi}{4}$ என்ற கோடும் வட்டமும் சந்திக்கும் புள்ளி C யைக் காண,

(ii), (iii) லிருந்து $r = 2a \sin \frac{\pi}{4} = 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$

$\therefore$ புள்ளி $C, \left(\sqrt{2}a, \frac{\pi}{4}\right)$

இங்கு வளைவரைகளின் சமன்பாடுகள், r-ஐ θ-ன் சார்பாகக் கொடுத்திருப்பதால்

தொகையிடும் அமைப்பு $\int \left[\int r \, dr\right] d\theta$

r-ன் எல்லைகள் $r = \sqrt{2a^2 \cos 2\theta}$, $r = 2a \sin\theta$

θ-ன் எல்லைகள் $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad A = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left[\int_{a\sqrt{2\cos 2\theta}}^{2a \sin\theta} r \cdot dr\right] \cdot d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} (4a^2 \sin^2\theta - 2a^2 \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= a^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} [(1 - \cos 2\theta) - \cos 2\theta)]\, d\theta$$

$$= a^2 \left[\theta - \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= a^2 \left[\frac{\pi}{12} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$\frac{a^2}{12} [\pi + 6\sqrt{3} - 12]$$

எ. கா. 4.

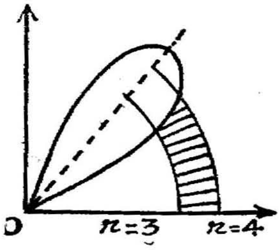
$\theta = 0,\ r = 3,\ r = 4$ என்ற கோடுகளுக்கும் $r = 5 \sin 2\theta$ என்ற வளைவரையின் கீழ்வரைக்கும் இடைப்பட்ட முதல் நாற்கூறுப் பகுதி (first quadrant) யிலுள்ள பரப்பைக் காண்க.

$\theta = 0$ என்பது x-அச்சு

$r = 3,\ r = 4$-வட்டங்கள்

இங்கு r-ன் எல்லைகள் 3, 4

θ-ன் எல்லைகள் $0, \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{r}{5}$



படம் 91.

பரப்புகாண அமைப்பு $\int [\int r\, d\theta]\, dr$

$$\therefore \quad A = \int_0^4 \left[\int_0^{\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{r}{5}} r \cdot d\theta \right] dr$$

r-ஐ மாறிலியாகக் கொள்ள

$$A = \int_0^4 r\,[\theta]_0^{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{r}{5}} \cdot dr.$$

$$= \int_3^4 r\,\frac{1}{2}\,\sin^{-1}\left(\frac{r}{5}\right)\cdot dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_3^4 r\,\sin^{-1}\left(\frac{r}{5}\right)\cdot dr$$

$\int r\,\sin^{-1}\left(\frac{r}{5}\right)\,dr$-ன் தொகை காண

$\frac{r}{5} = \sin u$ எனில், $r = 5\sin u$

$$\therefore\quad dr = 5\cos u\cdot du$$

$$\therefore\quad \int r\,\sin^{-1}\left(\frac{r}{5}\right)dr = \int 5\sin u\cdot u\cdot 5\cos u\cdot du.$$

$$= \tfrac{25}{2}\int u\cdot(\sin 2u)\,du$$

$$= \frac{25}{2}\int u\cdot d\left(\frac{-\cos 2u}{2}\right)$$

$$= -\tfrac{25}{4}\,[u\cos 2u - \tfrac{1}{2}\sin 2u]$$

$$= -\tfrac{25}{4}\,u\,(1 - 2\sin^2 u) + \tfrac{25}{4}\sin u\cdot\cos u$$

$$= -\frac{25}{4}\sin^{-1}\frac{r}{5}\left(1 - \frac{2r^2}{25}\right) + \frac{25}{4}\cdot\frac{r}{5}$$

$$\times\sqrt{1-\frac{r^2}{25}}$$

$$= \frac{1}{4} r \sqrt{25 - r^2} + \frac{1}{4}(2r^2 - 25) \sin^{-1} \frac{r}{5}$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{8}\left[r\sqrt{25 - r^2} + (2r^2 - 25)\sin^{-1}\frac{r}{5} \right]_3^4$$

$$= \tfrac{1}{8}\left[(32 - 25)\sin^{-1}\tfrac{4}{5} - [18 - 25]\sin^{-1}\tfrac{3}{5}\right]$$

$$= \tfrac{7}{8}(\sin^{-1}\tfrac{4}{5} + \sin^{-1}\tfrac{3}{5})$$

$$= \frac{7}{8} \times \frac{\pi}{2} \quad \because \quad \sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \tfrac{7}{16}\pi$$

பயிற்சிகள் 54

இரு மாறித் தொகை முறையில் காண்க.

1. வளைவரை $r^2 = a^2 \cos 2\theta$-ன் பரப்பளவைக் காண்க.

2. $r = 2a \cos \theta$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளிப்புறமாகவும் $r = a(1 + \cos \theta)$ என்ற நெஞ்சு வளைக்குட்புறமாகவுள்ள பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

3. வட்டம் $r = 2a \cos \theta$-க்கு உட்புறமாகவும், வட்டம் $r = a$-க்கு வெளிப்புறமாகவுமுள்ள பரப்பளவைக் காண்க.

4. $r = a(3 - \sin \theta)$, $r = 2a \cos 2\theta$ என்ற வளைவரைகளுக்கும் $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ என்ற கோடுகளுக்குமிடைப்பட்ட பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

5. $r = 2(\sin \theta + \cos \theta)$ என்ற வட்டத்திற்கு உள்ளும், $r = 2 \sin \theta$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியும் அடங்கிய, அச்சுகளின் முதல் நாற்கூறுப் பகுதியிலுள்ள பரப்பைக் காண்க.

6. $r(1 + \cos \theta) = a$ என்ற பரவளைவிற்கு வெளிப்புறமாகவும், $r = a(1 + \cos \theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையத்திற்கு உட்புறமாகவும் அடங்கிய பரப்பை காண்க.

7. $r = 8\cos\theta$, $r = 4$ என்ற வட்டங்களுக்குப் பொதுவான பரப்பைக் காணவும்.

8. $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ என்ற வளைவரைக்கு உட்புறமாகவும், $r = a\sqrt{2}\sin\theta$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளிப்புறமாகவும் முதற் நாற்கூறுப் பகுதியிலடங்கிய பரப்பைக் மதிப்பிடுக.

§ 78. துருவ ஆய எண்களில் ஒரு பரப்பின் பு.க. மையமும், நி. நெ. திறனும் காணல். (C. G. and M. I. in polar Co-ordinates)

(r, θ) என்ற ஒரு புள்ளியில் அடர்த்தி $= \rho\,(r, \theta)$ என்று கொள்வோம். நுண் பரப்பின் நிறை $= \rho \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ எனப் பிரதியிட

பு. க. மையம் : அமைப்புகளாவன

$$\bar{x} = \frac{\int\int \rho\cdot r^2 \cos\theta\cdot dr\cdot d\theta}{\int\int \rho\cdot r\cdot dr\cdot d\theta} \qquad \text{......(i)}$$

$$\bar{y} = \frac{\int\int \rho\cdot r^2 \sin\theta\; dr\cdot d\theta}{\int\int \rho\cdot r\cdot dr\cdot d\theta} \qquad \text{......(ii)}$$

$$\therefore \quad \bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \qquad \text{......(iii)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) \qquad \text{......(iv)}$$

∴ துருவ ஆய எண்களில் பு. க. மையம் $(\bar{r}, \bar{\theta})$ என்பதை இந்நான்கு அடிப்படை அமைப்புகளிலிருந்து பெறலாம்.

நி. நெ. தி.

y-அச்சையொட்டி

$$I_y = \int\int \rho\, r^3 \cos^2\theta\cdot dr\cdot d\theta$$

x-அச்சையொட்டி $I_x = \int\int \rho\, r^3 \sin^2\theta \cdot dr\cdot d\theta$

∴ துருவ ஆய நி. நெ. தி. அல்லது

$$I_0 = I_y + I_x = \int \int \rho \cdot r^3 \cdot dr \cdot d\theta.$$

எ. கா. 1.

இரு மாறித் தொகையீட்டில் $r = a\,(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையின் பு. க. மையம் காண்க. (அடர்த்தி மாறிலியெனக் கொள்க).

நெஞ்சுவளை தொடக்கக் கோட்டை யொட்டிச் சீராக அமைந்துள்ளது. ஆதலால் $\bar{y} = 0$

$$\bar{x} = \frac{\int \int \rho \cdot r\cos\theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta}{\int \int \rho \cdot r\, dr \cdot d\theta}$$

$$= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{a(1+\cos\theta)} r^2 \cos\theta \cdot dr\, d}{\int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{a(1+\cos\theta)} r \cdot dr \cdot a\theta}, \text{ அடர்த்தி மாறிலி.}$$

$$= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{r^2}{2}\right)_{0}^{a(1+\cos\theta)} \cdot \cos\theta \cdot d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{r^2}{2}\right)_{0}^{a(1+\cos\theta)} d\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} a^3 (1 + \cos\theta)^3 \cdot \cos\theta \cdot d\theta}{\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} a^2 (1 + \cos\theta)^2\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} a^3 \int_{0}^{\pi} 8 \cos^6 \frac{\theta}{2} \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) \cdot d\theta}{a^2 \int_{0}^{\pi} 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} \cdot d\theta}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} \; a \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\phi \; (2\cos^2\phi - 1)\, d\phi}{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\phi \cdot d\phi}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} \, a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^8\phi - \cos^6\phi)\, d\phi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\phi \; d\phi}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} \, a \left(\frac{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \right) \frac{\pi}{2}}{\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \; \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{3} \, a \; \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \times \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1} \left[\frac{7}{4} - 1 \right]$$

$$= \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 6} \cdot \frac{3}{4} \cdot a = \frac{5}{6} \, a$$

எ. கா. 2.

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வளையத்தின் நி. நெ. திறனை அதன் தொடக்கக் கோட்டையொட்டி இருமாறித் தொகையீட்டில் கணக்கிடுக.

(i) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ வளைவரையின் சமன்பாடு $\pm \theta$ மதிப்புகளால் மாறுவதில்லை. ∴ தொடக்கக் கோட்டையொட்டிச் சீராக வுள்ளது.

(ii) $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ மதிப்புகளுக்கு r^2 குறை மதிப்பு கொள்கிறது; ∴ இங்கு r கற்பனையாகும்.

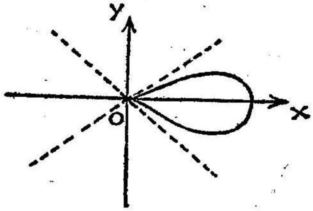
(iii) $\theta = 0$ எனில் $r = \pm a$

$\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ எனில் $r = 0$

$\therefore$ θ-வின் எல்லைகள் $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

r-ன் எல்லைகள் $0, a\sqrt{\cos 2\theta}$.

$\therefore$ OXஐ யொட்டி



படம் 92

நி. நெ. தி.

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\, r^2 \sin^2\theta \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_{0}^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \cdot r^3 \cdot dr\right] \sin^2\theta \cdot d\theta.$$

$$= \rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^4}{4}\right)_{0}^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \cdot \sin^2\theta \cdot d\theta.$$

$$= 2 \times \frac{1}{4}\rho \int_{0}^{-\frac{\pi}{4}} a^4 \cdot \cos^2 2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot d\theta.$$

$$= \frac{a^4 \rho}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot d\left(\frac{\alpha}{2}\right); \quad \alpha = 2\theta.$$

$$= \frac{a^4 \rho}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \frac{(1 - \cos \alpha)}{2} \cdot d\alpha.$$

$$= \frac{a^4 \rho}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{a^4 \rho}{8} \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{a^4 \rho}{96} (3\pi - 8)$$

வளேவின் நிறை

$$M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho \cdot r \cdot dr \cdot d\theta.$$

$$= 2\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2}\right)_0^{a\sqrt{\cos^2 \theta}} \cdot d\theta.$$

$$= \rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta \cdot d\theta$$

$$= \rho \cdot a^2 \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\rho a^2}{2}$$

$$\therefore \quad \text{நி. நெ. தி.} = \left(\frac{\rho a^2}{2} \right) \cdot \frac{a^2}{48} (3\pi - 8)$$

$$= M \cdot \frac{a^2}{48} (3\pi - 8)$$

பயிற்சிகள் 55

இருமாறித் தொகையீட்டில் துருவ ஆய அளவுகளில் பின்வருவனவற்றைச் செய்க.

1. ஒரு வட்டத்தினுள் அடர்த்தி ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், வட்டத்தின் சுற்றளவின் மேலுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரத்திற்கு நேர்விகிதத்திலிருந்தால் வட்டத்தின் நிறையைக் கணக்கிடுக.

2. ஒரு வட்டத்தின் அடர்த்தி அதன் ஒரு குறிப்பிட்ட விட்டத்திலிருந்து உள்ள தூரத்தில் K மடங்கானல், வட்டத்தின் நிறையைக் கணக்கிடுக.

3. நெஞ்சுவளை $r = a\,(1 + \cos\theta)$-ன் அடர்த்தி தொடக்கக் கோட்டிலிருந்துள்ள தூரத்தின் இருபடிக்கு நேர் விகிதத்திலிருந்தால் அதன் நிறை மையம் காண்க.

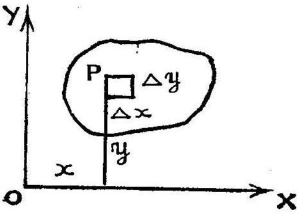
4. $r = \sin 2\theta$ என்ற வளைவரையின் வளையத்தில் $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ என்ற கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட பரப்பின் பு. க. மையம் காண்க.

5. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற வளைவரை வடிவத் தகட்டின் நி. நெ. திறனை அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாயும் ஆதி வழியாகச் செல்லும் அச்சையொட்டிக் காண்க.

6. ஒரு வட்டத் தகட்டின் அடர்த்தி அதன் சுற்றளவின் மேலுள்ள 0 என்ற, ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரத்தின் இருபடிக்கு நேர்விகிதத்திலுள்ளது. அதன் நி. நெ. திறனை, தளத்திற்குச் செங்குத்தாக O வழியாகச் செல்லும் அச்சையொட்டி மதிப்பிடுக.

§ 79 இருமாறித் தொகையீட்டு முறையில் உருளைப் பருமம் காணல். (Volume of Revolution)

(*a*) **தெக்கார்ட்டி ஆய** எண்களில் (Cartesian Co-ordinates) படத்தில் P என்ற (x, y) புள்ளி ஒரு அடைபட்ட பரப்பினுள் உள்ளது. OX-ஐயொட்டிப் பரப்புச் சுழலும்போது ஓர் உருளைப் பருமம் ஏற்படுகிறது. அதனைக் காண வேண்டும்.



படம் 93

P-யிலுள்ள நுண் பரப்பு $= \triangle x \cdot \triangle y$

OXஐ ஒரு முறை சுற்றும்போது நுண் பருமம் அண்ணளவாக

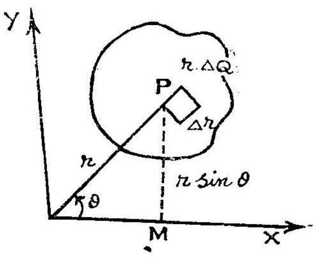
$= 2\pi y (\triangle y \cdot \triangle x)$, பாப்பசு தேற்றப்படி

$\therefore$ உருளைப் பருமம் $= \int \int 2\pi y \cdot dy\, dx$
ஏற்ற எல்லைகளில்

(*b*) **துருவ ஆய எண்களில்** (Polar Co-ordinates) **உருளைப் பருமம்**

அடைபட்ட வளைவரையின் சமன்பாடு $r = f(\theta)$ என்போம்.

$P(r, \theta)$ என்ற புள்ளியில் நுண் பரப்பு $= r \cdot d\theta \cdot dr$ தொடக்கக் கோட்டையொட்டிச் சுற்றும் ஆரை $MP = r \sin\theta$.



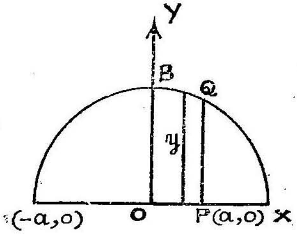
படம் 94

$\therefore$ ஒரு சுற்றில் ஏற்படும் நுண்பருமம்

$$= (2\pi \sin\theta)(r\, d\theta \cdot dr)$$
$$= 2\pi r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$\therefore$ உருளை நுண்பருமம் $= \int \int 2\pi r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta$
ஏற்ற எல்லைகளில்

எ. கா. 1



படம் 95

ஆரை a கொண்ட ஒரு கோளத்தின் பருமனை இருமாறித் தொகையீட்டு முறையில் கணக்கிடுக.

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = a^2$$

கோளத்தின் பருமம்

$$= \int_{-a}^{+a} \int_{0}^{y} 2\pi y \cdot dy \cdot dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{+a} \int_{0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} y \cdot dy \cdot dx.$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{+a} \left(\frac{y^2}{2}\right)^{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx = \frac{2\pi}{2} \times 2 \int_{0}^{+a} (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \left(\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right)_{0}^{a} = 2\pi \times \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}$$

எ. கா. 2.

$r = a\ (1 + \cos\theta)$ என்ற வளைவரை அதன் தொடக்கக் கோட்டை யொட்டிச் சுற்றும்போது ஏற்படும் உருளைப் பருமத்தை இருமாறித் தொகையீட்டு முறையில் காண்க.

$$V = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{r} 2\pi r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \left[\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \cdot dr. \right] \sin\theta \cdot d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \left(\frac{a^3}{3} \right)_0^{a(1+\cos\theta)} \sin\theta \cdot d\theta.$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^3 \sin\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} 8\cos^6\frac{\theta}{2} \cdot 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot 2$$

$$= \frac{64\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\phi \cdot \sin\phi\, d\phi\,; \qquad \frac{\theta}{2} = \phi$$

$$= \frac{64}{3} \pi a^3 \left(-\frac{\cos^8\phi}{8} \right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{64}{3} \times \pi a^3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \pi a^3.$$

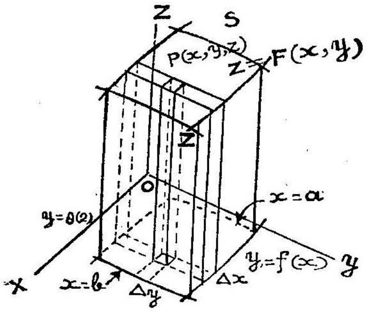
§ 80. ஒரு வளைபரப்பின் கீழுள்ள பருமனை இருமாறித் தொகையீட்டில் காண்க. (Volume under a Surface)

(i) தெக்காட்டின் ஆயங்கள் :

படத்தில் $Z = F(x, y)$ என்ற வளைபரப்பின் பகுதி S-ன் கீழ் ஒரு முப்பரிமாணப் பொருள் XY அடித்தளத்தின் மேலுள்ளது.

அடித்தளப்பரப்பை A என்போம். இப்பரப்பு $y = g(x)$, $y=f(x)$ $x=a$, $x=b$ என்ற எல்லைகளுக்கிடைப்பட்டது. மேல். கீழ் பரப்புகளை அடைக்கும் பக்கங்களாவன $x = a$, $x = b$ என்ற சம தளங்களும், $y = g(x)$, $y = f(x)$ என்ற நேர் உருளைகளுமாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட எல்லைகளுக்கிடையிலுள்ள பொருளை Z ஆயத்திற்கு இணையான இணைகரத் திண்மம் (Parallelopiped) வடிவத்லுள்ள நுண் பகுதிகளாகச் செய்வோம். பரப்பு A-யை X, y அச்சுகளுக்கிணையான பக்கங்களுள்ள நுண்ணிய $(\triangle x \cdot \triangle y)$ நீள் சதுரங்களாக்கினுல் அவை இத்திண்மங்களின் அடிப்பக்கங்களாகும்.



படம் 96

மேற்பரப்பு S-ல் P எனும் (x, y, z) புள்ளி ஒரு நுண் திண்மத்தின் ஒரு முனையென்ருல்,

P-யின் கீழுள்ள நுண்பகுதியின் பருமம் $= z \cdot \triangle y \cdot \triangle x$. படத்தில் காட்டியவாறு,

முதலில் yz தளத்திற்கு இணையாகவுள்ள நுண் திண்மங்களை ஒன்று சேர்க்க, $\triangle y \to 0$ எனும்போது, $\triangle x$ ஓரம் மாறிலியாகவுள்ள மெல்லிய தகடு ஏற்படும்.

அதன் பருமம் $\triangle V$ எனில்

$$\triangle V = \left[\text{எல்லை}_{\triangle y \to 0} \sum_{g(x)}^{f(x)} (z \cdot dy) \right] \triangle x \cdot \text{ ஆகும்.}$$

$$= \left[\int_{y = g(x)}^{y = f(x)} z \cdot dy \right] \triangle x$$

பிறகு,

நுண்தகடுகளை $x = b$, $x = a$ என்ற எல்லைகளுக்குள் ஒன்று சேர்க்க, $\triangle x \to 0$ எனும் எல்லையின் பொருளின் பருமம் V கிடைக்கும்.

$$V = \text{எல்லை}_{\triangle x \to a} \sum_{x = a}^{x = b} \left[\int_{g(x)}^{f(x)} z \cdot dy \right] \triangle x$$

$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} z \cdot dy \cdot dx.$$

$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} F(x, y)\, dy \cdot dx \text{ எனவாகும்.}$$

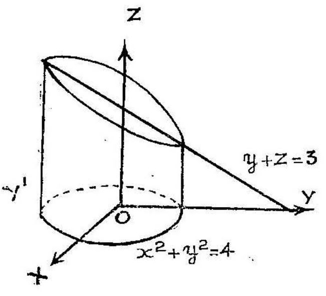
குறிப்பு : xy தளத்திலுள்ள எல்லைகள்

$x = \psi(y)$, $x = \phi(y)$, $y = c$, $y = d$ என்றால்

$$V = \int_c^d \int_{\psi(y)}^{\phi(y)} F(x, y)\, dx \cdot dy \text{ என்று எளிதில் அறியலாம்.}$$

எ. கா. 1.

$x^2 + y^2 = 4$ என்ற நேர்வட்ட உருளை, $z = 0$, $y + 2 = 3$ என்ற சமதளங்கள் இவற்றிற்கிடைப்பட்ட பருமத்தை மதிப்பிடுக.



படம் 97

$x^2 + y^2 = 4$ என்ற வட்டம், உருளையின் xy தளத்தின்வெட்டு முகம்.

$y + z = 3$ என்ற தளம், X-அச்சுக்கு இணையாக உருளையை மேலே வெட்டி நீள் வட்டம் செய்கிறது.

இங்கு $z = f(x, y) = (3 - y)$

x-ன் எல்லைகள் $x^2 + y^2 = 4$-லிருந்து

$x = \pm\sqrt{4 - y^2}$

xy தளத்தில் வட்டம் Y-அச்சை வெட்டும் எல்லைகளைக் காண, $x = 0$ என்றிட, $y = \pm 2$

$$\therefore \quad V = \int_{-2}^{+2} \left[\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} (3-y)\cdot dx \right] dy.$$

$$= \int_{-2}^{+2} \left[\left(3x - \frac{xy}{2} \right)_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} \right] dy$$

$$= 2 \int_0^2 [2 \cdot 3\sqrt{4-y^2}]\, dy = 12 \int_0^2 \sqrt{4-y^2} \cdot dy$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta \cdot d\theta, \; y = 2\sin\theta \text{ என்றிட}$$

$$\therefore \quad V = 48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 d\theta = 48 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 12\pi$$

எ. கா. 2.

$x^2 + y^2 = 1$ என்ற நேர்வட்ட உருளை, சமதளம் $Z = 0$, கனபரவளைவு $x^2 + y^2 = 4 - Z$ இவற்றிலடங்கிய பருமத்தைக் காண்க.

இங்கு,

$$Z = 4 - (x^2 + y^2);\ x^2 + y^2 = 1 \text{ ல் } y = 0 \text{ எனில் } x = \pm 1$$

$$V = \int_{-1}^{+1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} (4 - x^2 - y^2)\, dy \right] dx$$

$$= 2 \int_0 \left(4y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right)_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=+\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 4 \int_0^1 \left[\left(4\sqrt{1-x^2} - x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \right] dx$$

$x = \sin\theta$ என்றிட,

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos\theta - \sin^2\theta \cdot \cos\theta - \tfrac{1}{3} \cdot \cos^3\theta) \cdot \cos\theta \, d\theta,$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2\theta - \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta - \frac{\cos^4\theta}{3} \right) d\theta$$

$$= 4 \left[4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \right] \frac{\pi}{2}$$

$$= 4 \left[2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right] \frac{\pi}{2} = 4 \times \frac{7}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7}{2}\pi$$

எ. கா. 3.

$Z = x^2 + y^2$ என்ற கனபரவளைவுப் பரப்பின்கீழ் xy தளத்தில் $x = 1,\ y = 1,\ x + y = 3$ என்ற கோடுகளாலடைபடும் முக்கோணத்தின் மேலுள்ள பருமனைக் கணக்கிடுக.

இங்கு, $Z = f(x, y) = x^2 + y^2$

$y = 1,\ x + y = 3$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியில் $x = 2$

$\therefore$ x-ன் எல்லைகள் 1, 2

y-ன் எல்லைகள் $1, 3 - x$

$$\therefore \quad V = \int_1^2 \left[\int_1^{3-x} (x^2 + y^2) \cdot dy \right] dx$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_1^{3-x} \cdot dx$$

$$= \int_1^2 \{ x^2 (3 - x - 1) + \tfrac{1}{3} [(3 - x)^3 - 1] \} \, dx$$

$$= \int_1^2 [3x^2 - x^3 - x^2 + \tfrac{1}{3} (27 - x^3 - 27x + 9x^2 - 1)] \, dx$$

$$= \int_1^2 \left(2x^2 - x^3 + 9 - \frac{x^3}{3} - 9x + 3x^2 - \frac{1}{3} \right) dx$$

$$= \int_1^2 (- \tfrac{4}{3} x^3 + 5x^2 - 9x + \tfrac{26}{3}) \, dx$$

$$= \left[- \frac{4}{3}\left(\frac{x^4}{4}\right)_1^2 + \frac{5}{3} \cdot (x^3)_1^2 - \frac{9}{2}(x^2)_1^2 + \frac{26}{3}(x)_1^2 \right]$$

$$= [- \tfrac{1}{3} (15) + \tfrac{5}{3} \times 7 - \tfrac{9}{2} \times 3 + \tfrac{26}{3}]$$

$$= \left(- 5 + \frac{35}{3} - \frac{27}{2} + \frac{26}{3} \right) = \frac{-30+70-81+52}{6}$$

$$= \frac{11}{6}$$

எ. கா. 4.

$2x + y + z = 4$ என்ற தளத்தின் கீழும், $x^2 + y^2 = 1$ என்ற உருளையினுள்ளும் அமைந்த பருமத்தை முதல் அரைக்கால் வட்டப் பகுதியில் (frist octant) கணக்கிடுக.

$$z = f(x, y) = 4 - 2x - y$$

xy-தளத்திலுள்ள வட்டம் $x^2 + y^2 = 1$, x-அச்சை வெட்டும் புள்ளி $x = \pm 1$

$\therefore$ x-ன் எல்லைகள் XY-ன் நாற்பகுதியில் 0, 1

Y-ன் எல்லைகள் 0, $\sqrt{1 - x^2}$

$$V = \int_0^1 [\int_0^{\sqrt{1 - x^2}} (4 - 2x - y) \cdot dy] \, dx$$

$$= \int_0^1 \left(4y - 2xy - \frac{y^2}{y}\right) \cdot dx \Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 4\int_0^1 \left[4\sqrt{1-x^2} - 2x\sqrt{1-x^2} - \left(\frac{1-x^2}{2}\right)\right] dx$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, d(-x^2)$$

$$- \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \pi + \tfrac{2}{3}(-1) - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} = \pi - 1$$

பயிற்சிகள் 56

இருமாறித் தொகையீட்டு முறையில் பின்வரும் முப்பரிமாணப் பொருள்களின் பருமம் காண்க :--

1. அச்சுகளாலும், $4x + 6y + 3z - 12$ என்ற தளத்தாலும் அடைபட்டது.

2. $y = e^x$ என்ற வளைவரைசார்ந்த உருளை தளங்கள் $z = y$, $z = 0$ $x = 2$ இவற்றிற்கிடைப்பட்டது.

3. $z = 9 - x^2 - y^2$ என்ற கன பரவளைவுக்குக் கீழாகவும் $x + 2y = 2$ என்ற தளத்திற்குப் பின்புறமாகவும் முதல் அரைக்கால் வட்டப் பகுதியில் (Frist Octant) அடங்கியது.

4. முதல் அரைக்கால் வட்டப்பகுதியில் $z = xy$ என்ற வளைபரப்புக்கும் $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ என்ற உருளைக்கும் இடைப்பட்டது.

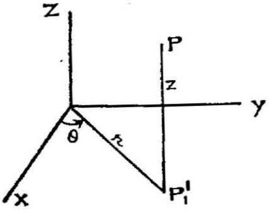
5. xy-தளம், $x + y^2 - 2y = 0$ என்ற உருளை, $z = 2y$ என்ற தளம் இவற்றாலடைபட்டது.

6. $z = 9 - x^2 - 9y$ என்ற வளைபரப்பு, xy-தளம் இவற்றினிடையேயுள்ளது.

7. $z = z^2 + y^2$, $y = 1 - x^2$ அச்சுகள், இவற்றிற்கிடையே முதல் அரைக்கால் வட்டப்பகுதியிலுள்ளது.

8. முதல் அரைக்கால் வட்டப்பகுதியில் $x^2 + y^2 = 1$ என்ற நேர்வட்ட உருளையினுள், அவ்வுருளையினுலும், $z = 4 - 2x - y$, $x = 0, y = 0, z = 0$ என்ற தளங்களினுலும் அடைக்கப்பட்டது.

§ 81. வளைவரப்பின் கீழுள்ள பருமம் — உருளை ஆயத் தொலைவுகள் (Volume under a surface in cylindrical Co-ordinates)



படம் 98

XY-தளத்தில் P-ன் வீழ்ச்சி P' (Projection of P) P'-ன் அளவுகள் (r, θ) $P'P = z$ என்றால், r, θ, z என்பன P-யின் உருளை ஆயத் தொலைவுகளாகும். $z = \theta\ (x, y)$ என்ற ஒரு வளை பரப்பின் சமன்பாட்டை $x = r \cos\ \theta$, $y = r \sin\theta$ எனப் பிரதியிட்டு $z = f\ (r, \theta)$ என்று மாற்றியமைக்கலாம்.

இப்போது, $z = f\ (r, \theta)$ என்ற வளைபரப்பின் ஒரு பகுதி S xy தளத்தில் வளைபரப்பு S-ன் வீழ்ச்சி $r = \phi\ (\theta)$, $r = \psi\ (\theta)$ என்ற வளைவரைகளுக்கும் $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ என்ற கோடுகளுக்கு மிடைப்பட்ட முப்பரிமாணப் பொருளின் பருமத்தை இருமாறித் தொகையீட்டு முறையில் காண்பதை விளக்குவோம்.

xy தளத்தில் P-யின் வீழ்ச்சி P^1

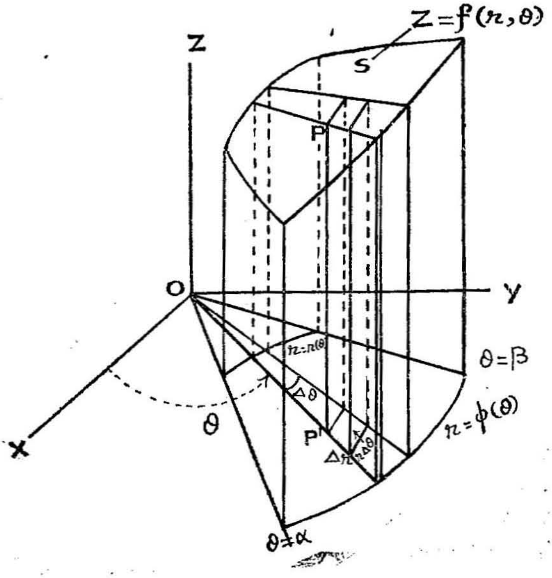
P'-ன் அளவுகள் (r, θ)

P-யின் அளவுகள் (r, θ, z)

$q = f\ (r, \theta)$

XY தளத்தில் கோணம் $(\beta - \alpha)$-ஐ, ஆரைக் கோடுகள் வரைந்து $\Delta\theta$ அளவுள்ள கணக்கற்ற நுண்கோணங்களாகவும், ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் பிரிக்கின்றோம்.

பிறகு, O-ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒன்றுக்கொன்று சம இடைவெளி $\triangle r$ உள்ள பொது மைய வட்டங்கள் வரைகின்றோம். இப்போது பரப்பு A ஆனது, P' எனும் புள்ளியிலுள்ளது போல்



படம் 99

கணக்கற்ற நுண் பரப்புகள் $rd\theta \cdot dr$, ஆகின்றன. P'-லுள்ள நுண்பரப்பின் மேல் உயர்த்திய நுண்பட்டகம் (prism)-Pயை ஒரு முனையாகக் கொண்டு S-வளை பரப்பின் கீழிருக்கும்

நுண்பட்டகத்தின் பருமம்

$$= z \cdot (r \cdot \triangle r \cdot \triangle \theta), \text{ அண்ணளவாக}$$

$\triangle \theta$யை மாறிலியாக வைத்து, θ. $\theta + \triangle \theta$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட நுண் பட்டகங்களை யொன்று சேர்க்க, மெல்லிய ஒரு முனையில் வெட்டப்பட்ட முக்கோண வடிவப் பகுதி தகட்டின் பருமம்,

$$\triangle V = \left[\underset{\triangle r \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{\psi(\phi)}^{\phi(\theta)} (z \cdot r \cdot \triangle r) \right] \triangle \theta$$

$$= \left[\int_{\psi(\theta)}^{\phi(\theta)} zr \cdot dr\right] \cdot \Delta\theta$$ எனவாகும்.

பிறகு

இத்தகடுகளை ஒன்று சேர்க்கப்

$$\text{பருமம் } V = \text{எல்லை}_{\Delta\theta \to \theta} \sum_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \left[\int_{\psi(\theta)}^{\phi(\theta)} z \cdot r\, dr\right] \Delta\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\psi(\theta)}^{\phi(\theta)} z \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\psi(\theta)}^{\phi(\theta)} \cdot f(r, \theta)\, r \cdot dr \cdot d\theta$$ என்ற அமைப்பாகும்.

எ. கா. 1.

$2x + y + z = 4$ என்ற சமதளத்தின் கீழும் $x^2 + y^2 = 1$ என்ற வட்டத்தின் சார்பான உருளையின் உள்ளும் அடங்கிய முதல் நாற்கூறுப் பகுதி (first quadrant) யிலுள்ள பருமத்தை, உருளை ஆயத் தொலைவுகள் (Cylindrical Co-ordinates) கொண்டு மதிப்பிடவும்.

இங்கு $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$

$\therefore$ தளத்தின் சமன்பாடு, $z = 4 - 2x - y$

அதாவது $f(r, \theta) = 4 - 2r\cos\theta - r\sin\theta$

உருளையின் சமன்பாட்டில் $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

என்றிட

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1 \therefore r = 1$

முதல் நாற்கூறுப் பகுதியில் (first quadrant)

r-ன் எல்லைகள் $(0, 1)$

θ-ன் எல்லைகள் $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore V = \int \int f(r, \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 (4 - 2r\cos\theta - r\sin\theta) \cdot r\, dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 (4r - 2\cos\theta\, r^2 - \sin\theta \cdot r^2)\, dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 \cdot \frac{r^2}{2} - 2\cos\theta \cdot \frac{r^3}{3} - \sin\theta \; \frac{r^3}{3} \right)_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \tfrac{2}{3}\cos\theta - \tfrac{1}{3}\sin\theta)\, d\theta.$$

$$= (2\theta - \tfrac{2}{3}\sin\theta + \tfrac{1}{3}\cos\theta)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \pi - 1.$$

எ. கா. 2.

$Z = x$ என்ற சமதளத்திறகுக் கீழும், xy தளத்திலுள்ள $r = a\cos 2\theta$ என்ற வளைவரைக்கு மேல் $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{4}$ என்ற வரம்பில் அடைபட்டுள்ள பருமத்தைக் கணக்கிடுக.

$$Z = x = r\cos = f(\theta)$$

$$V = \int\int f(r, \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta.$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{a\cos 2\theta} (r\cos\theta) \cdot r \cdot dr \right] d\theta.$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\cos\theta \cdot \frac{r^3}{4}\right]_{r=0}^{r=a\cos 2\theta} d\theta.$$

$$= \tfrac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^3 (\cos^3 2\theta) \cdot \cos\theta \cdot d\theta.$$

$$= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\theta)^3 \cos\theta \cdot d\theta.$$

$$= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\theta)^3 d(\sin\theta)$$

$$= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2u^2)^3 du \; ; \quad u = \sin\theta.$$

$$= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 6u^2 + 12u^4 - 8u^6)\, du$$

$$= \frac{2a^3}{3} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{6}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{2a^3}{3} \left[\frac{3}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{7\sqrt{2}}\right] = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3 \cdot 16}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{16\sqrt{2}\, a^3}{105}$$

பயிற்சிகள் 57

உருளை ஆய அளவுகளைக் கொண்டு இரு மாறித்தொகையீட்டு முறையில் பருமம் காண்க.

1. $z = r$ என்ற கூம்பின் வெளிப்புறமாகவும், $r = a \sin 2\theta$ என்ற (வளைவரையின்) உருளையின் உட்புறமாகவும முதல் அரைக்கால் வட்டப்பகுதியில் உள்ள பருமம்.

2. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்திற்கும், $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற (வளைவரையின்) உருளைக்கும் பொதுவான பருமம்.

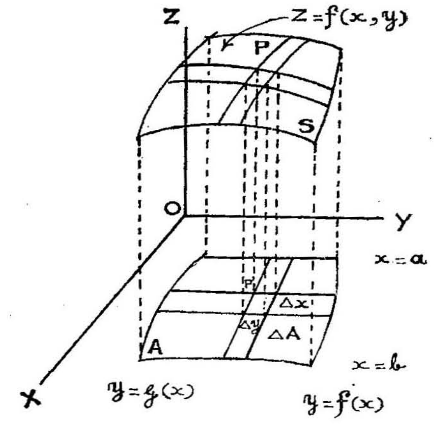
3. $r^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்திற்கும், $r = a \cos\theta$ என்ற (வளைவரையின்) உருளைக்கும் பொதுவான பருமம்.

4. $z = r \cos 2\theta$ என்ற வளைபரப்புக்கும், $r = a \cos 2\theta$ என்ற (வளைவரையின்) உருளைக்கும், $z = 0, \theta = 0$ என்ற சம தளங்களுக்குமிடையில் முதல் அரைக்கால் வட்டப்பகுதியிலுள்ள பருமம்.

5. முதல் அரைக்கால் வட்டப் பகுதியில் $az = a^2 - r^2$, $r = a \tan\theta, \theta = \frac{\pi}{4}$, $z = 0$ இவற்றிற்கிடைப்பட்ட பருமம்.

18. வளைவுத் தளங்களின் பரப்பளவுகள்
(Areas of Curved Surfaces)

§ 82.



படம் 100

S—வளைவுத் தளம் $z = f(x, y)$-ன் ஒரு பகுதி

P—*S*-ன் மேல் ஒரு புள்ளி (x, y, z)

P'—*XY*-ன் தளத்தின் *P*-யின் வீழ்ச்சி $(x, y, 0)$

A—*XY* தளத்தில் $y = g(x)$, $y = f(x)$ வளைவரைகளுக்கும், $x = a$, $x = b$ கோடுகளுக்குமிடைப்பட்ட பரப்பு.

ΔA — x, y அச்சுகளுக்கிணையாக முறையே Δx, Δy சம இடைவெளிகள் விட்டு, *A*-யில் வரைந்த கோடுகளால் அடைபட்ட நுண் பரப்புகளில் ஒன்று, இது *P'*-ஐ ஒரு முனையாகக் கொண்டுள்ளது.

$\triangle A'$ என்பது என்பது $\triangle A$-யின் மேல் உயர்த்திய பட்டகம் (prism) P-யில் வளைதளத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடு தளத்தில் வெட்டும் நுண் பகுதியின் பரப்பு.

r என்பது P-ல் வரைந்த தொடுதளம் XY-தளத்துடன் செய்யும் குறுங்கோணம், அல்லது OZ அச்சுக்கும் P-யில் தொடு தளத்திற்குச் செங்குத்துக் கோட்டிற்கும் இடைக்கோணம்.
இப்போது

$\triangle A'$-ன் வீழ்ச்சி XY-தளத்தில் $\triangle A$

$$\therefore \quad \triangle A = \triangle A' \cos r \qquad \ldots\ldots \text{(i)}$$

ஆனல், $\cos r$ என்பது P-யில் வளைவுத் தளத்தின் குத்துக் கோட்டிற்கு (Normal) திசைக் கிடக்கை (direction cosine). வளைவுத் தளத்தின் சமன்பாடு $z = f(x, y)$. குத்துக் கோட்டின் மற்ற திசைக் கோணங்கள்

α, β எனில்,

$$\frac{\cos \alpha}{-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)} = \frac{\cos \beta}{-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)} = \frac{\cos r}{+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 1}}$$

என அறிவோம்.

$$\therefore \quad \cos r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

இதை (i)-ல் பிரதியிட

$$\triangle A = \triangle A' \quad \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\therefore \quad \triangle A' = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 1} \;\; \triangle x \, \triangle y,$$

$$\therefore \quad \triangle A = \triangle x \cdot \triangle y$$

$$\therefore \quad S = \lim_{\substack{\triangle x \to 0 \\ \triangle y \to 0}} \sum \triangle A', \text{ உரிய எல்லைகளில்}$$

$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \; dy \cdot dx.$$

குறிப்பு : 1. $z = f(x, y)$-யிலிருந்து $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$ மதிப்புகளை x, y-ன் சார்புகளாகக் காணலாம்.

2. வளைவுத் தளத்தி லுள்ள பரப்பை yz தளத்திலோ அல்லது zx தளத்திலோ செங்குத்து வீழ்ச்சிகளாக்கினல் பரப்பு காணும் அமைப்புகளை ஏற்றவாறு மாற்றியமைக்கவேண்டும்.

எ. கா. 1.

$z = 4 - x^2$ என்ற உருளையின் வளைவு பரப்பை $y = x$ என்ற சமதளம் வெட்டிய பகுதியை முதல் அரைக்கால் வட்டப் பகுதி (First octant) எல்லையில் காண்க.

உருளை xy தளத்தை வெட்டும் கோட்டைக்காண $z = 0$ என்றிட, $0 = 4 - x^2$

$\therefore \quad x = 2$ (முதல் அரைக்கால் வட்டப் பகுதியில்)

$\therefore \quad x$-ன் எல்லைகள் $(0, 2)$

y-ன் எல்லைகள் $(0, x)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$\therefore \quad S = \int_0^2 \left[\int_{y=0}^{y=x} \sqrt{1 + x^2} \cdot dy \right] dx.$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} \cdot x\, dx$$

$4x^2 = u$ எனில், $8x \cdot dx = du$

$x\, dx = \frac{du}{8}$; u-ன் எல்லைகள் 0, 16

$$\therefore \quad S = \int_0^{16} \sqrt{1+u}\, \frac{du}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \Big[(1+u)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^{16}$$

$$= \tfrac{1}{12} [17^{\frac{3}{2}} - 1] = \tfrac{1}{12} (17\sqrt{17} - 1)$$

எ. கா. 2.

இருமாறித்தொகையீட்டு முறையில் ஒரு கோளத்தின் புறப் பரப்பைக் காண்க.

கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்போம். xy தளத்தில் புறப்பரப்பின் எல்லைகள் (முதல் அரைக்கால் வட்டப் பகுதியில்) x-ன் எல்லைகள் $0, a$

y-ன் எல்லைகள் $0, \sqrt{a^2 - x^2}$.

$$z^2 = a^2 - x^2 - y^2$$

$$\therefore \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1(-2y)}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 = \frac{4(x^2 + y^2)}{4(a^2 - x^2 - y^2)} + 1$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + a^2 - x^2 - y^2}{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}$$

$\therefore$ கோளத்தின் புறப்பரப்பு

$$= 8 \int_0^a \int_{y=0}^{y=\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dy \cdot dx$$

$$= 8a \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2) - y^2}}\, dy \cdot \right] dx.$$

$$= 8a \int_0^a \left[\sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx.$$

$$= 8a \int_0^a \frac{\pi}{2} \cdot dx = 8a \cdot \frac{\pi}{2} \left(x \right)_0^a$$

$$= 4\pi a^2$$

பயிற்சிகள் 58

இரு மாறித் தொகையீட்டு முறையில் பரப்பு காணவும்.

1. $y = 0, y = \frac{a}{2}$ தளங்களுக்கிடையிலுள்ள $x^2 + z^2 = a^2$ என்ற உருளையின் புறப்பரப்பு.

2. $x^2 + z^2 = a^2$ என்ற உருளையின் வளைபரப்பை, $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற உருளை வெட்டிய பகுதி.

3. $x^2 - 2ax + 2^2 = 0$ என்ற உருளையின் புறப்பரப்பை $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ என்ற கோளம் வெட்டிய பகுதி.

4. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ என்ற கூம்பின் புறப்பரப்பு $x^2 + y^2 - 2x = 0$ என்ற உருளையினுள் இருக்கும் பகுதி.

5. $z = \frac{1}{2} y$ என்ற தளத்தின் பரப்பு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற உருளையினுள் முதல் அரைக்கால் வட்டப் பகுதியிலுள்ள பகுதி.

§ 83. தளங்களின் வளைபரப்பை உருளை ஆய தூரங்களில் கணக்கிடும் முறை (Cylindrical Co-ordinates)

தெக்காட்டின் ஆயத்தொலைவுகளில் வளைபரப்பு காணும் அமைப்பு $S = \int\int \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \cdot dy \cdot dx.$

இங்கு வளைவுத்தளத்தின் சமன்பாடு $z = F(x. y)$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ எனப் பிரதியிட, $z = f(r, \theta)$ என ஆகுமென்போம்.

இப்போது, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$-விலிருந்து பகுத்து வகைக்கெழு காண,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \qquad \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \qquad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

தவிர $Z = F(x, y)$ யிலிருந்து

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\theta \qquad \ldots\ldots \text{(iii)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial y}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)$$

$$\therefore \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\delta x}\cdot\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\theta \qquad \ldots\ldots \text{(iv)}$$

$\therefore$ (iii), (iv) வர்க்கமாக்கிக் கூட்ட

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

எனவாகும்.

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 + 1}$$

நுண்பரப்பு $dx \cdot dx = r \cdot dr \cdot d\theta$ என்று கொண்டு உரிய எல்லைக்குள்

$$S \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{z}{\partial \theta}\right)^2} \cdot r\, dr \cdot d\theta$$

எனவாகும்.

எ. கா.

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$ என்ற கோளத்தின் புறப் பரப்பை $z = 19 - x^2 - y^2$ என்ற கனபரவளைவினுள் கணக்குடுக.

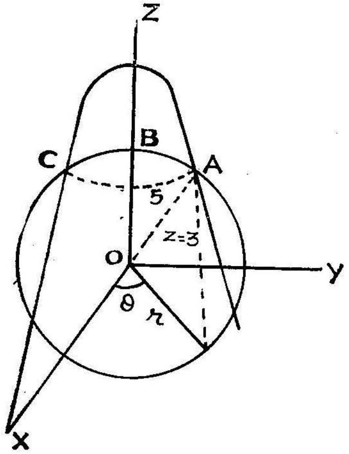
$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ கோளம்} \qquad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

$$x^2 + y^2 + z = 19 \text{ கனபரவளைவு} \qquad \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

(i), (ii) லிருந்து, பொதுவான புள்ளிகள்

$$z^2 - 2 - 6 = 0$$

$$\therefore \quad z = +3, -2.$$



படம் 101

இங்கு $z = 3$யில் கோளத்தின் மேல் பரப்புள்ளது

கோளத்தின் ஆரை — 5

$$\therefore \quad \text{எல்லை } r = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$= 4$$

அல்லது

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 16$$

$$r = 4$$

θ-ன் எல்லை $\left(\theta, \dfrac{\pi}{2}\right)$ எடுத்து, வந்த பரப்பை நான்கு மடங்காக்கவும்.

$$Z = F(r, \theta)$$

$$= 19 - r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 19 - r^2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial r} = -2r, \ \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0.$$

$$\therefore \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{1 + 4r^2}$$

$$\therefore\ S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r\, dr \cdot d\theta.$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{1 + 4r^2}\, d\frac{(r^2)}{2} \right]_0^4 d\theta.$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times 2 \times 4} \right]_0^4 d\theta.$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (65^{\frac{3}{2}} - 1)\, d\theta$$

$$= \frac{65^{\frac{3}{2}} - 1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(65\sqrt{65} - 1) \times \pi}{6}$$

பயிற்சிகள் 59

உருளை ஆயத் தொலைகள் கொண்டு இருமாறித் தொகையீட்டில் செய்க :

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 20$ என்ற கோளத்தினுள்ளிருக்கும் $8z = x^2 + y^2$ என்ற கன பரவளைவின் மேல் பரப்பைக் கணக்கிடுக.

2. $r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற வளைவரை சார்ந்ததான உருளை $r^2 + z^2 = 4a^2$ என்ற கோளத்தின் மேற்பரப்பை முதல் அரைக் கால் வட்டப் பகுதியில் காண்க.

3. xy—தளத்தில் x-அச்சு, y-அச்சு, $x + y = a$ என்றகோடு இவற்றிலடங்கிய முக்கோணத்தைச் செங்குத்தாக வீழ்த்தும் (Orthogonal projection) $z = \sqrt{2xy}$ என்ற வளைவுத் தளத்தின் பரப்பைக் காண்க.

§ 84. மும்மாறித்தொகை ஈடுகள் (Triple Integrals)

$$\int_{l}^{m} \int_{n_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} f(x, y, z)\, dx \cdot dy \cdot dz.$$

இந்த அமைப்பை மும்மாறித் தொகை ஈடு என்கிறோம். m, l மாறிலிகள், v_1, v_2 மாறிலிகள் அல்லது z-ன் சார்புகள், u_1, u_2 மாறிலிகள் அல்லது y, z-களின் சார்புகள்.

தொகையிடும் முறை : முதலில்

y, z இவற்றை மாறிலிகளாக் கருதி

$$\int_{u_1}^{u_2} f(x, y, z)\, dx$$ என்று தொகையிடுகிறோம்.

$u_1\ u_2$ எல்லைகள் x-ஐயொட்டியதல்ல. ஆதலால் தொகை $F(y, z)$ போன்ற y, z-களின் சார்பாகும். பிறகு z-ஐ ஒரு மாறிலியாகக்கருதி,

$$\int_{v_1}^{v_2} F(y, z)\, dy$$ என்று தொகையிடுகிறோம்.

$v_1\ v_2$ எல்லைகள் x, y-களை ஒட்டியதல்ல. ஆதலால் தொகை $G(z)$ போன்ற z-ன் சார்பாகும்.

முடிவில் $\int_{l}^{m} G(z)\, dz$ என்று தொகையிட

மதிப்பு ஒரு மாறிலியாகவரும். இங்குக்கையாளப்பட்டது, உள்ளிருந்து வெளியே தொகையிடும் முறை.

உள்ளிருந்து வெளியே வரிசையாகத் தொகை ஈடு காண்பதை நினைவில் வைக்கும் அமைப்பு,

$$\boxed{\int_{l}^{m} \boxed{\int_{v_1}^{v_2} \boxed{\int_{u_2}^{u_1} f(x, y, z,)\, dx}\, dy}\, dz}$$

குறிப்பு : எல்லைகளனைத்தும் மாறிலிகளானால், வரிசையை மாற்றியும் தொகையிடலாம். ஒரு மாறியையொட்டித் தொகை காணும்போது மற்றவைகளை மாறிலியாகக் கருதவேண்டும்.

எ. கா. 1.

மதிப்பிடுக. $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{(1-z^2)^{-\frac{1}{6}}} \int_0^{x} x \cdot dy \cdot dx \; dz.$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{(1-z^2)^{-\frac{1}{6}}} \left[x \int_0^{x} \cdot dy\right] dx \cdot dz, \text{ (}x\text{-மாறிலி எனில்)}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{(1-z^2)^{-\frac{1}{6}}} [x\cdot(y)]_0^{x} \, dx \cdot dz. \right.$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{(1-z^2)^{-\frac{1}{6}}} x^2 \cdot dx \right] dz.$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{3} \left(x^3\right)_0^{(1-z^2)^{-\frac{1}{6}}} dz.$$

$$= \tfrac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dz = \tfrac{1}{3} \left(\sin^{-1} z\right)_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{18}$$

எ. கா. 2.

$$\int_0^{a} \int_0^{b} \int_0^{c} (x + y + z) \, dx \cdot dy \cdot dz \text{ (}y, z \text{ மாறிலிகள் எனில்)}$$

$$I = \int_0^{a} \int_0^{b} \left(\frac{x^2}{2} + y \cdot x + z \cdot x \right)_{x=0}^{x=c} dy \cdot dz.$$

$$= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{c^2}{2} + cy + cz\right) (\because \text{ மாறிலி}) \text{ எனில்}$$

$$= \int_0^a \left(\frac{c^2 y}{2} + \frac{c \cdot y^2}{2} + cy \cdot y\right)_0^b dz$$

$$= \int_0^a \left(\frac{c^2 b}{2} + \frac{cb^2}{2} + cz \cdot b\right) dz$$

$$= \left(\frac{c^2 b \cdot z}{2} \times \frac{cb^2}{2} + \frac{cb \cdot z^2}{2}\right)_0^a$$

$$= \frac{b^2 a}{2} + \frac{cb^2 a}{2} + \frac{cba^2}{2} = \frac{abc}{2}(a + b + c)$$

பயிற்சிகள் 60

தொகையிடுக :

1. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^2 x^2 y \cdot z \cdot dz$

2. $\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^k r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta\, d\phi$

3. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx \cdot dy \cdot dz$

4. $\int_0^{\log a} \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} \cdot dz \cdot dy \cdot dx$

5. $\int_0^3 \int_0^{(9-x^2)^{\frac{1}{4}}} \int_{x-y}^{x+y} z \cdot dz \cdot dy \cdot dx$

6. $$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{(4-x^2-y^2)^{\frac{2}{3}}} (4-x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}\, dz \cdot dy \cdot dx$$

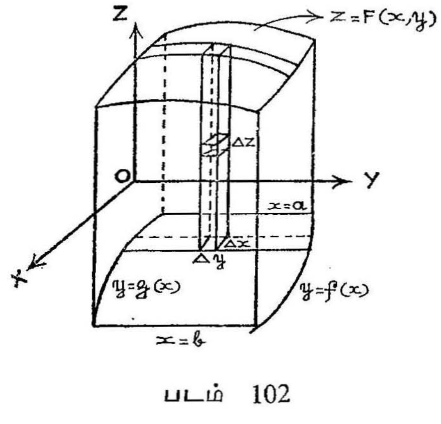
7. $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\frac{\pi}{2x}} \int_0^{xy^2} \frac{x}{y} \cos \frac{z}{y} \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos x} \int_0^{y+4} z^{-\frac{3}{2}} \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin\theta} \int_0^{4+r\cos\theta} r \cdot dz \cdot dr \cdot d\theta$$

10. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\phi} \int_0^{a\sqrt{1+\cos\theta}} r^3 \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$$

85. மும்மாறித் தொகையீட்டு முறையில் பருமங் காணல் (Volume by Triple Integral)



படம் 102

$Z = F\,(x, y)$ என்ற வளை தளம் மேல் எல்லையாகவும், xy-தளம் கீழ் எல்லையாகவும், சமதளங்கள் $x = a$, $x = b$; உருளை தளங்கள் $y = g\,(x)$, $y = f\,(x)$ நெடுக்கை (vertical)-ப் பக்க எல்லைகளாகவும் உள்ள ஒரு முப்பரிமாணப் பொருளின் பருமம் காண்போம்.

xy, yz, zx தளங்களுக்கு இணையாகவும், ஒன்றுக்கொன்று முறையே $\triangle z$, $\triangle x$, $\triangle y$ இடைவெளிகளில், கணக்கற்ற சம தளங்கள் வரைந்து பருமத்தை $\triangle z$, $\triangle x$, $\triangle y$ நீள, அகல உயர அளவுகளுள்ள நுண்ணிய பட்டகங்களாக்குவோம்.

ஒரு நுண் பகுதியின் பருமம் $= \triangle z \cdot \triangle x \cdot \triangle y$. படத்தில் கண்டவாறு Xy-தளத்தில் $\triangle x \cdot \triangle y$ நுண் பரப்பின் மேல் எண்ணற்ற நுண் பட்டகங்கள் $F\,(x, y)$ தளம் வரையில் z-உயரத்திற்கு ஒரு செவ்வக இணைகரத்திண்ம வடிவில் (Rectangular Parallelopiped) இருக்கும்.

$\triangle z \to 0$ எல்லையில் இத் திண்மத்தின் பருமம்

$$= \Sigma \triangle z\,(\triangle y \cdot \triangle x)$$

$$= \left[\int_0^{F(x,y)} \cdot\, dz \right] \triangle y \cdot \triangle x$$

$\triangle x$ மாருது, இந்நுண் திண்மங்களை $y = g\,(x)$ $y = f(x)$ வரையிலும் நகர்த்த ஒரு மெல்லிய தகடான பருமம் வரும்.
$\triangle y \leftarrow 0$ எனும்போது இத்தகட்டின்

$$\text{பருமம்} = \left\{ \underset{\triangle y \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{g(x)}^{f(x)} \left[\int_0^{F(x,y)} dz \right] \triangle y \right\} \triangle x$$

$$= \left\{ \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \int_0^{F(x,y)} dz \cdot dy \right\} \triangle x$$

அடுத்து,

$x = a$, $x = b$ என்ற எல்லைகளிலுள்ள மெல்லிய தகடுகளை ஒன்று சேர்க்க, $\triangle x \to 0$ எனும்போது பொருளின் பருமம்

$$V = \underset{\triangle x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_a^b \left[\int_{g(x)}^{f(x)} \int_0^{F(x,y)} dz \cdot dy \right] \triangle x$$

$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \int_0^{F(x,y)} dz \cdot dy \cdot dx$$ என அமையும்.

எ. கா. 1.

$z = x + y^2$ மேல் தளமாகவும் XOY அடித்தளமாகவும், $y = 2\sqrt{x} = x = 2\sqrt{y}$ என்ற உருளைகளுக்குள் முதல் அரைக் கால் வட்டப்பகுதியில் உண்டாகும் பருமத்தை மதிப்பிடுக.

Z எல்லைகள் $z = 0, \quad z = x + y^2$

X எல்லைகள் $x = \frac{y^2}{4} \quad x = 2\sqrt{y}$

Y-எல்லைகளைக்காண,

$x = \frac{y^2}{4}$, $x = 2\sqrt{y}$ இவற்றிலிருந்து

$$\frac{y^2}{4} = 2\sqrt{y} \quad \frac{y^4}{16} = 4y$$

$$y(y^3 - 64) = 0 \qquad \therefore \quad y = 0, 4$$

$$\therefore \quad V = \int_0^4 \int_{\frac{y^2}{4}}^{2\sqrt{y}} \left[\int_0^{x+y^2} dz \right] \cdot dx \cdot dy$$

$$= \int_0^4 \left[\int_{\frac{y^2}{4}}^{2\sqrt{y}} (x + y^2)\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^4 \left[\left(\tfrac{1}{2} x^2 + y^2 x \right)_{\frac{y^2}{4}}^{2\sqrt{y}} \right] dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{1}{2} \cdot 4y + y^2 \cdot 2\sqrt{y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^4}{16} - \frac{y^4}{4} \right] dy$$

$$= \int_0^4 \left(2y + 2y^{\frac{5}{2}} - \frac{9y^4}{32} \right) dy$$

$$= 4^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} \cdot 4^{\frac{7}{2}} - \frac{9 \cdot 4^5}{32 \cdot 5}$$

$$= 16 + \frac{512}{7} - \frac{288}{5} - 16 + 73\tfrac{1}{7} - 57\tfrac{3}{5}$$

$$= 31\tfrac{19}{35}$$

$$= \frac{1104}{35}$$

எ. கா. 2.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டக் கோளத்தின் பருமனை முதல் அரைக்கால் வட்டப்பகுதியில் கணக்கிடுக. நீள் வட்டக் கோளம் அச்சுகளை $(a, 0, 0,)$ $(0, b, 0)$ $(0, b, c)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

xy தளத்தில் எல்லை, நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{yx}{b^2} = 1$

$V = \int \int \int dz \cdot dy \cdot dx$ என்று கொண்டால் முதலில் z-ன் எல்லை முதல் எண் பகுதியில் (x, y களில் சார்பு)

$$z = 0, \; z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

y-ன் எல்லை XY-தளத்தில்

$$y = 0, \; y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \; (X\text{-ல் சார்பு})$$

x-ன் எல்லை, $x = 0$, $x = a$

$$\therefore \; V = \int_0^a \int_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_0^{z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \cdot dy \cdot dx$$

$$= c \int_0^a \left[\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)}\, dy \right] dx$$

$$= \frac{c}{b} \int_0^a \left[\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy \right] dx$$

$$= \frac{c}{b} \int \left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) - y^2} + \frac{b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^{-1}\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \right]_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \frac{c}{b} \int_0^a \frac{b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{\pi}{2}\cdot dx$$

$$= \frac{\pi bc}{4} \int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi bc}{4}\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)_0^a = \frac{\pi bc}{4}\left(a-\frac{a}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi abc}{6}$$

∴ நீள்வட்டக்கோளத்தின்

பருமம் $= 8 \times \frac{\pi abc}{6} = \frac{4}{3}\pi abc$

எ. கா. 3.

$\int\int\int xyz\ dx \cdot dy \cdot dz$ என்ற தொகையீட்டை, $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ என்ற கோளத்தின் மிகை அரைக்கால் வட்டப்பகுதி முழுவதும் மதிப்பிடுக.

z-ன் எல்லைகள் $z = 0$, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (x, y-களின் சார்பு)

xy தளத்தில் y-ன் எல்லைகள்

$y = 0$, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (x-ன் சார்பு)

x-ன் எல்லைகள் $x = 0$ $x = a$.

$$\therefore\ V = \int_0^a \int_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} \int_{z=0}^{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}} xyz \cdot dz \cdot dy \cdot dx.$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x \cdot y \left(\frac{a^2 - x^2 - y^2}{2}\right) dy \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \int^{y=\sqrt{a^2-x^2}} \left[x(a^2 - x^2)\, y - xy^3 \right] dy \cdot dx.$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \left[x(a^2 - x^2)\frac{y^2}{2} - x\frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^a \left[2x(a^2 - x^2)^2 - x(a^2 - x^2)^2 \right] dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^a x(a^2 - x^2)^2 \cdot dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin\theta \cdot a^4 \cdot \cos^4\theta \cdot a\cos\theta \cdot d\theta$$

$x = a \sin\theta$ எனில்

$$= \frac{a^6}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos^5\theta \cdot d\theta.$$

$$= \frac{a^6}{8} \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^6}{48}$$

பயிற்சிகள் 61

மும்மாறித் தொகையீட்டு முறையில் கணக்கிடுக.

1. $4z = 16 - 4x^2 - y^2$ என்ற நீள்வட்டக்கன பரவளைவும் (Elliptic parabololid), XOY தளமும் அடைக்கும் பருமத்தைக் காண்க.

2. $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற கன பரவளைவும், XOY தளம், $x^2 + y^2 = 2ax$ என்ற உருளை, இவற்றாலடைபட்ட பகுதியின் பருமத்தை மதிப்பிடுக.

3. $x^2 + y^2 = 4$ என்ற உருளை, $y + z = 4$, $z = 0$ என்ற சமதளங்கள், இவற்றிற்கிடையிலுள்ள திண்மத்தின் (Solid) பருமம் எவ்வளவு?

4. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, அச்சுத்தளங்கள், இவற்றிடைப்பட்ட பருமத்தை மதிப்பிடுக.

5. $z = 0$ என்ற சமதளம், $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ என்ற நீள் வட்டக் கோளத்தை வெட்டிய பகுதியின் பருமமெவ்வளவு?

6. மதிப்பிடுக. $\iiint \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx \cdot dy \cdot dz$ என்ற தொகையீட்டை $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளம் முழுவதும்.

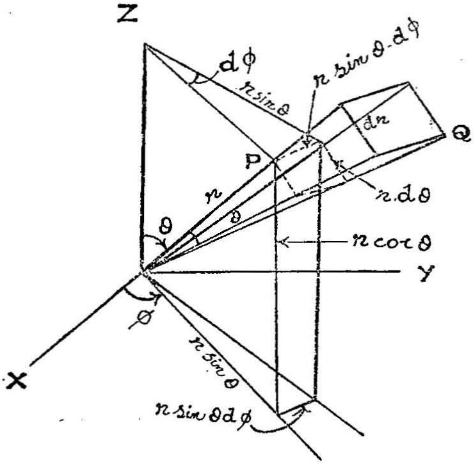
7. $z = 9x^2 + y^2$, $z = 18 - 9x^2 - y^2$ என்ற நீள்வட்டக் கன பரவளைவுகளாலடைபடும் பருமத்தை அளவிடுக.

8. $z = 4 - x^2$, $z = 4 - y^2$ என்ற உருளைகளால் அடைக்கப்பட்ட முதல் அரைக்கால் வட்டப்பகுதியிலுள்ள பருமத்தின் அளவென்ன ?

9. முதல் அரைக்கால் வட்டப் பகுதியில் $z = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ என்ற உருளை சம தளங்கள் $y = \dfrac{x}{2}$, $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$ இவற்றை எல்லைகளாகக் கொண்ட பருமத்தைக் காண்க.

10. $4x + 6y + 3z = 12$, ஆயதளங்கள், இவற்றுலுண்டாகும் நான்முகியின் (Tetrahedron) பருமத்தைக் கணக்கிடுக.

§ 86. கோள ஆய எண்கள் (Spherical Co-ordinates)



படம் 103

P எனும் புள்ளி (r, θ), Q என்பது $(r + dr, \theta + d\theta$
கோணம் $Z\hat{O}P = \theta$.

கோணம் ϕ என்பது YOX, ZOP தளங்களுக்கு இடைக் கோணம்.

θ-ன் எல்லை $0 - \pi$, ϕ-ன் எல்லை $0 - 2\pi$. தெக்காட்டின் ஆய தூரங்களில் P என்பது (x, y, z) எனில்,

$$x = r \sin\theta \cdot \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \cdot \sin\phi$$

$z = r\cos\theta$, என்பது தெளிவு.

இவற்றிலிருந்து, $x^2 + y^2 = r^2 \sin\theta$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

இப்போது, P என்ற புள்ளியை $(r \sin\theta \cdot \cos\phi,\ r \sin\theta \sin\phi,\ r\cos\theta)$, அல்லது $P(r, \theta, \phi)$ எனக் குறிக்கின்றோம்.

(r, θ, ϕ) அளவுகளைக் கோள ஆய எண்கள் (Spherical Co-ordinates) என்கிறோம்.

படத்தில் PQ ஒரு நுண் பருமம், dV, $\triangle r \to 0$, $\triangle\theta \to 0$, $\triangle\phi \to 0$ என்ற எல்லைகளில் நுண்பருமம் $r \cdot d\theta$, $r\sin\theta\ d\phi$, dr அளவுகள் கொண்ட ஒரு செவ்வகப் பட்டகம்.

$$\therefore\quad \triangle V = r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot dr.$$

எ. கா.

கோள ஆய எண்களைக் கொண்டு ஒரு கோளத்தின் பருமம் காண்க.

கோளத்தின் ஆரை a என்போம்.

r-ன் எல்லைகள் $(0, a)$

θ-ன் எல்லைகள் $(0, \pi)$

ϕ-ன் எல்லைகள் $(0, 2\pi)$

ஓர் அரைக்கால் வட்டப் பகுதியில் பருமம் கணக்கிட்டால்,

எல்லைகள் $r = 0, a$

$$\theta = 0, \tfrac{\pi}{2},\quad \phi = 0, \tfrac{\pi}{2}$$

$\therefore$ அரைக்கால் வட்டப் பகுதியின் பருமம் $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi.$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \frac{a^3}{3} \cdot d\theta \cdot d\phi$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot d\phi = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$\therefore$ கோளத்தின் பருமம், $V = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \times 8$

$$= \tfrac{3}{4} \pi a^3.$$

பயிற்சிகள் 61 (விரிவு)

கோள ஆயங்களைக் கொண்டு

11. $b^2 (x^2 + y^2) + a^2 z^2 = a^2 b^2 \; (a < b)$ என்ற திண்மத்தின் பருமம் காண்க.

12. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ என்ற கோளத்திலிருந்து $9z^2 = 16x^2 + 16y^2$ என்ற கூம்பு, XOY தளத்திற்கு மேற்புறமாக வெட்டும் பருமத்தைக் கணக்கிடுக.

உருளை ஆயங்கள் (z, r, θ) கொண்டு பருமத்தைக் கணக்கிட்டுச் சரி பார்த்திடுக.

§ **87. ஒரு முப்பரிமாணப் பொருளின் புவிக் கவர்ச்சிமையம், நிலை நெம்புதிறன் காணல்** (C. G. and M. I. of a solid)

(*a*) **புவிக்கவர்ச்சி மையம்**

ஒரு பருமப் பொருளை x-அச்சுக்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு மெல்லிய நுண்துண்டுகளாகப் பிரித்து ஒன்றின் பருமம் dv என்போம். அதன் அடர்த்தி ρ ஒரு மாறிலியாகவோ அல்லது x-ன் சார்பாகவோ இருந்தால், நிறை $dm = \rho dv$

$$\therefore \text{ பொருளின் பு. க, மையத்தின் } \bar{x} = \frac{\int \rho \cdot x \cdot dv}{\int \rho \cdot dv}$$

இத்தொகையீட்டில் x-ன் எல்லைகள், பொருளின் எல்லைகளுக் கேற்றவாறு இருக்கும்.

இதுபோலவே $\bar{y}$, $\bar{z}$ பு. க. மையங்களையும் காணலாம்.

இவற்றைப் பொதுப்படுத்தி, ஒரு பொருளின் அடர்த்தி $\rho\,(x, y, z)$ என்ற புள்ளியில் ρ என்பது ஒரு மாறிலியாகவோ, அல்லது $x, y,$ zகளின் சார்பாகவோ இருப்பின், பு. க. மையம் $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ உரிய எல்லைகளில்

$$m \cdot \bar{x} = \int \int \int \rho \cdot x \cdot dx\,dy\,dz \quad \dots \dots \quad (1)$$

$$m \cdot \bar{y} = \int \int \int \rho\, y\, dx\,dy\,dz \quad \dots \dots \quad (2)$$

$$m \cdot \bar{z} = \int \int \int \rho z\, dx\,dy\,dz \quad \dots \dots \quad (3)$$

என அறியலாம்.

$$\text{இங்கு } m = \int \int \int \rho\, dx\,dy\,dz \quad \dots \dots \quad (4)$$

(*b*) **நிலை நெம்புத்திறன்** (M. I.)

m — நிறையும் கொடுத்த ஒரு கோடு அல்லது தளத்திலிருந்து தூரம் d-யும் உள்ள ஒரு பொருளின் நிலை நெம்புத்திறன் அக்கோடு அல்லது தளத்தையொட்டி md^2 என்பது வரையறை.

(i) அச்சுகளையொட்டி : (x, y, z) என்ற ஒரு புள்ளியின் தூரங்கள் x, y, z அச்சுகளிலிருந்து முறையே $\sqrt{y^2 + z^2}$), $\sqrt{z^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 + y^2}$. அடர்த்தி P ஒரு மாறிலியாகவோ அல்லது x, y, zகளின் சார்பாகவோ இருக்கட்டும். அப்போது வரையறைப் படி, x-அச்சையொட்டி

நி. நெ. தி. $Ix = \int\int\int \rho (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ ...... (5)

அதுபோலவே $Iy = \int\int\int \rho (z^2 + x^2)\, dx\, dy\, dz$ ...... (6)

$Iz = \int\int\int \rho (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$ ...... (7)

(ii) அச்சுத்தளங்களையொட்டி

(x, y, z) புள்ளி XOY, YOZ, ZOX தளங்களிலிருந்துள்ள தூரங்களின் வர்க்கங்கள் முறையே z^2, x^2, y^2 ஆகும். நி. நெ. தி. முறையே Ixy, Iyz, Izx என்றால்,

$$Ixy = \int\int\int \rho z^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad ...... (8)$$

$$Iyz = \int\int\int \rho x^2\, dx \cdot dy \cdot dz \quad ...... (9)$$

$$Izx = \int\int\int \rho y^2\, dx\, dy \cdot dz \quad ...... (10)$$

(5), (6), (7), (8), (9), (10) இவற்றிலிருந்து

$$Ix = Ixy + Izx$$

$$Iy = Ixy + Iyz$$

$Iz = Izx + Iyz$ என்றறியலாம்.

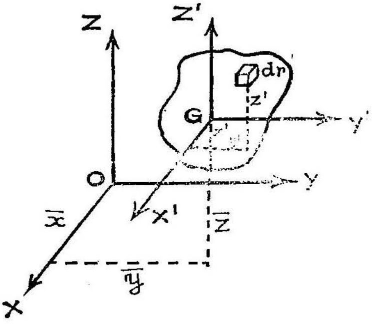
இவை பின்கண்ட I-தேற்றத்தை விளக்குவன.

I. குத்தாயத்தேற்றம் (Theorem of Perpendicular Axis)

ஒரு நேர்கோட்டை ஒரு பொருளின் நிலை நெம்புத்திறன் அக்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வுள்ள இரு சமதளங்களையொட்டிய நி. நெ. திறன்களின் கூடுதலாகும்.

II. இணை ஆயத்தேற்றம் (Theorem of Parallel Axis)

ஒரு அச்சையொட்டி ஒரு பொருளின் நிலை நெம்புத்திறன், அவ்வச்சிற்கு இணையாக அப் பொருளின் புவிக்கவர்ச்சி மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் அச்சையொட்டிய நிலை நெம்புத் திறனுடன், பொருளின் நிறையை இவ்விரு அச்சுகளின் இடைத்தூரத்தின் இரு படியால் (square) பெருக்கிய பலனைக் கூட்டி வந்த, தொகை யாகும்.



படம் 104

நிறுவுதல் :

$G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ பு.க. மையம் Gx^1, Gy^1, Gz^1 பொருளின் பு. க. மையத்தின் வழியாக முறையே OX, OY, OZ அச்சுகளுக்கு இணையாகவுள்ளவை.

(x, y, z) என்ற புள்ளியில் ஒரு நுண்பருமம் dv எனில் $dv = dz \cdot dy \cdot dx$.

புது அச்சுகளில் இப் புள்ளியில் (x^1, y^1, z^1) என்றால்

$y = \bar{y} + y^1$, $z = \bar{z} + z^1$ எனப் பிரதியிட

$$Ix = \int\int\int (y^2 + z^2)\rho \cdot dv$$

$$= \int\int\int [(\bar{y} + y^1)^2 + (\bar{z} + z^1)^2]\rho \cdot dv.$$

$$= \int\int\int (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\rho\, dv + \int\int\int (y'^2 + z'^2)\rho\, dv$$

$$+ 2[\bar{y}\int\int\int y'\rho\, dv + \bar{z}\int\int\int z'\rho \cdot dv]$$

பொருளின் பு.க. மையத்தின் வழியாக Gy', Gz' செல்வதால்,

$$\int\int\int y' \rho\, dv = 0, \int\int\int z'\rho \cdot dv = 0$$

$$\therefore Ix = (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\int\int\int \rho \cdot dv + Ix'$$

$$= m \cdot OG^2 + Ix'$$

ஏனெனில் $\int\int\int \rho \cdot dv = m$, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2 = OG^2$,

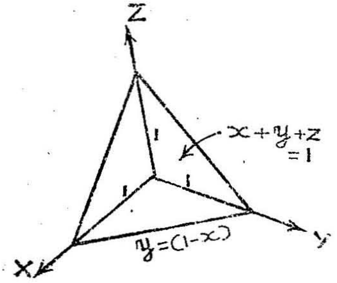
$$\int\int\int (y'^2 + z'^2)\rho \cdot dv = Ix'$$

எ. கா.

$x + y + z = 1$ என்ற தளம் அச்சுத்தளங்களுடன் உண்டாக்கும் நான்முகியின் நி. நெ. திறனை x-அச்சை யொட்டிக் காண்க. ρ ஒரு மாறிலி எனக் கொள்க.

$$Ix = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} \rho(y^2 + z^2)\, dz \cdot dy \cdot dx$$

$$= \rho \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(y^2 \cdot z + \frac{z^3}{2} \right)_0^{1-x-y} dy \cdot dn$$



படம் 105

$$= \rho \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[y^2 (1 - x - y) + \frac{(1 - x - y)^3}{3} \right] dy \, dx$$

$$= \rho \int_0^1 \left[(1 - x) \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{(1 - x - y)^4}{4 \cdot 3 \cdot (-1)} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \rho \int_0^1 \left[\frac{(1 - x)^4}{3} - \frac{(1 - x)^4}{4} + \frac{(1 - x^4)}{12} \right] dx$$

$$= \frac{\rho}{6} \int_0^1 (1 - x) \; dx = \frac{\rho}{6} \left[\frac{(1 - x)^5}{-5} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{30} \rho$$

பயிற்சி 62

மும்மாறித் தொகையீட்டில் மதிப்பிடுக.

1. $4x + 3y + z = 12$ என்ற தளம், அச்சுத் தளங்கள் இவற்ருல் அடைபட்ட நான்முகியின் நிறை மையம் காண்க.

அதிகப்படியான பயிற்சி: அடர்த்தி சீரானதாகக் கொண்டு I_{xy}, I_{xz}, I_x காணலாம்.

2. மேற்கொடுத்த (பயிற்சி 1) நான்முகியில் அடர்த்தி, ஒரு புள்ளியில், XY தளத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரத்திற்கு நேர் விகிதம் எனக்கொண்டு பு. க. மையத்தின் Z—ஆய தூரத்தைக் காண்க.

அதிகப்படியான பயிற்சி: YZ தளத்தையொட்டி நி. நெ. தி.

3. $Z = 2xy$ என்ற வளைதளம் $Z = 0$, $X = 2$, $y = 2$ என்ற தளங்களுக்கும் இடைப்பட்ட ஒரு பொருளின் நிலை நெம்புத் திறனைச் சீரான அடர்த்தி ρ எனக்கொண்டு ஆயதளங்கள், ஆயக் கோடுகள் இவற்றையொட்டி முதல் அரைக்கால் வட்டப் பகுதியில் முறையே காண்க.

அதிகப்படியான பயிற்சி: பயிற்சி (3)-ல் ஒரு புள்ளியில் அடர்த்தி XY தளத்திலிருந்த அப்புள்ளியின் தூரத்திற்கு நேர் விகிதமெனக் கொண்டு பு. க. மையம் காண்க.

4. கோளம் $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, கனபரவளைவு $6z = 18 - x^2 - y^2$, தளம் $Z = 0$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட திண்மத்தின் நிறை மையம் காண்க.

அதிகப்படியான பயிற்சி: பயிற்சி (4)-ல் ஒரு புள்ளியில் அடர்த்தி அப்புள்ளி z-அச்சிலிருந்து உள்ள தூரத்தில் k-மடங்கு எனக் கொண்டு பு.க. மையம் காணவும்.

5. அடர்த்தி Z-அச்சு தூரத்தில் k-மடங்கு எனக் கொண்டு பயிற்சி (4)-ல் நிலை நெம்புத் திறனை (a) z-அச்சையொட்டி (b) (1, 2, 0) வழியாக z-அச்சுக்கு இணையான கோட்டையொட்டி (c) xz-தளத்தையொட்டிக் காண்க.

6. $r = z\,(1 - \cos\theta)$ என்ற உருளை, $r = 4\,(1 - \cos\theta)$ என்ற வளைதளம், xy தளம் இவற்ருலடைபட்ட பகுதியின் பு.க. மையத்தின் z-ஆய தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

அதிகப்படியான பயிற்சி: பயிற்சி (6)-ல் சீரான அடர்த்தி ρ எனக்கொண்டு z-அச்சையொட்டி நி. நெ. திறன் காண்க.

7. ஆரை a உள்ள ஓர் அரைக் கோள வடிவப் பொருளில் அடர்த்தி சமச்சீர் ஆயத்திலிருந்து (Axis of symmetry) ஒரு புள்ளியின் தூரத்தின் வர்க்கம் எனக் கொண்டு நிலை நெம்புத்திறனை (*a*) சீரான ஆயத்தையொட்டி (*b*) a தூரத்தில் சீரான அச்சுக்கு இணையான கோட்டையொட்டிக் காணவும்.

அதிகப்படியான பயிற்சி: பயிற்சி (7)-ல் பு.க. மையம் காணவும்.

19 . பன்மாறித் தொகையீடுகள் (தொடர்ச்சி)

§88 . எல்லைகளின் கட்டுப்பாடு

இருமாறித் தொகையீடு $\int_{X_0}^{X} \int_{Y_0}^{Y} f(x, y)\, dy\, dx$-ல்

பொதுவாக, y-ன் எல்லைகள் Y_0, Y என்பன x-ன் சார்புகளாகவும் x-ன் எல்லைகள் X_0, X மாறிலிகளாகவுமிருக்கும்.

$$\text{(i)} \quad U = \int_0^a \int_x^{\frac{a^2}{x}} x^{l-1} y^{m-1} \cdot dy \cdot dx \quad (l > m)$$

$$= \int_0^a \frac{x^{l-1}}{m} \left(\frac{a}{x^m} - x^m \right) dx$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^a \left(a^{2m} \cdot x^{l-m-1} - x^{l+m-1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{m} \left(a^{2m} \cdot \frac{1}{l-m} a^{l-m} - \frac{a^{l+m}}{l+m} \right)$$

$$= \frac{a^{l+m}}{m} \cdot \frac{2m}{l^2 - m^2} = \frac{2a^{l+m}}{l^2 - m^2}$$

மேற்கண்ட தொகையீட்டில் y-ன் எல்லைகள் x, $\frac{a^2}{x}$; x-ன் எல்லைகள் 0, a என வகைப்படுத்தியுள்ளது. ஆனால் பல இடங்களில் தொகையீட்டில் வரும் மாறிகள் ஒரு கட்டுப்பாட்டில்

இணைந்து வரும். அப்போது எல்லைகளைத் தொகையிட எளிதாக அமைக்க வேண்டும்.

மேல் எடுத்துக்காட்டில்,

$$U = \int \int {}^{l-1} \cdot y^{m-1} \cdot dy\, dx.$$

என்ற தொகையை $x + y < h$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் x, y களின் எல்லா மிகை மதிப்புகளுக்கும் வரையறைத் தொகையீடு காணவேண்டுமெனில்,

y-ன் எல்லைகள் $0, h - x$; x-ன் எல்லைகள் $0, h$

$$\text{(ii)} \quad U = \int_0^h \int_0^{h-x} x^{l-1} \cdot y^{m-1}\, dy \cdot dx$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^h x^{l-1} \left[(y^m) \right]_0^{h-x} dx$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^h x^{l-1} (h - x)^m \cdot dx$$

$$= \int_0 h^{l+m} \cdot u^{l-1} (1 - u)^m \cdot du,$$

$\therefore \quad x = hu$ என

$$= \frac{h^{l+m}}{m} \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(l+m+1)}$$

$$= h^{l+m} \cdot \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m+1)}$$

மும்மாறித் தொகையீடு

$U = \int \int \int x^{l-1} \cdot y^{m-1} \cdot z^{n-1} \cdot dz \cdot dy \cdot dx$-ல் x, y, z எப்போதும் மிகை மதிப்புகள் பெற்றும் $x + y + z < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் வந்தால்,

z-ன் எல்லைகள் : 0, $1 - x - y$

y-ன் எல்லைகள் : 0, $1 - x$

x-ன் எல்லைகள் : 0, 1 எனவாகும்.

$$\therefore \quad U = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^{l-1} \cdot y^{m-1} \cdot z^{n-1} \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

ஆனால்

$$\text{(ii) விருந்து} \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \cdot y^{m-1} \cdot z^{n-1} \cdot dz \cdot dy$$

$$= (1-x)^{m+n} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$$

$$\therefore \quad U = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)} \int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m+n} \cdot dx$$

$$U = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)} \cdot \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(l+m+n+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}$$

கிளை 1.

கட்டுப்பாடு $x + y + z < h$ என்றிருந்தால்

$$u = h^{l+m+n} \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}$$

கிளை 2.

$U = \int \int \int \dots \dots x^{l-1} \cdot y^{m-1} \cdot z^{n-1} \dots\dots dz \cdot dy\, dx$ எனப் பன்மாறித் தொகையீடானால், $(x + y + z + \dots \dots < 1)$

$$U = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n) \dots \dots}{\Gamma(1 + l + m + n + \dots \dots)}$$

இது டிரிக்லெட்டின் தேற்றம் (Dirichlet's Theorem)

கிளை 3.

$U = \int\int\int x^{l-1} \cdot y^{m-1} \cdot z^{n-1}\, dz \cdot dy\, dx$-ல் மாறிகள் மிகையாகவும் $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிலிருப்பின்

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p = u, \left(\frac{y}{b}\right)^q = v, \left(\frac{z}{c}\right)^r = w$$

எனப் பிரதியிட

$$x = a\, u^{\frac{1}{p}}$$

$$dx = \frac{a}{p}\, u^{\frac{1}{p} - 1} \cdot dp$$

$$x^{l-1} = a^{l-1}\, u^{\frac{l}{p} - \frac{1}{p}}$$

இதுபோலவே y-ம் z-ம்

$$\therefore \quad U = \frac{a^l \cdot b^m \cdot c^n}{p \cdot q \cdot r} \int\int\int u^{\frac{l}{p} - 1} \cdot v^{\frac{m}{q} - 1}\, w^{\frac{n}{r} - 1} \cdot dw\, dv \cdot du$$

கட்டுப்பாடு $u + v + w < 1$

$$\therefore\ U = \frac{a^l \cdot b^m \cdot c^n}{p \cdot q \cdot r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right)\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}\right)}$$

கிளை 4.

$x + y + z < h$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்,

$$U = \int\int\int x^{l-1} \cdot y^{m-1} \cdot z^{n-1}\, dz \cdot dy \cdot dx$$

$$= h^{l+m+n} \cdot \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(1 + l + m + n)}$$

இதனின்று,

$x+y+z>u$, எனினும் அது $<u+du$, என்ற கட்டுப்பாட்டில் தொகையிடுவோம். முன்னதாக வலதுபுறம் h இருக்குமிடத்து மாறி u எனக்கொண்டு uஐயொட்டி வகைக்கெழு காண,

$$\frac{dU}{du}=(l+m+n)\cdot u^{l+m+n-1}\,\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(1+l+m+n)}$$

$$=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{(l+m+n)}\cdot u^{l+m+n-1} \text{ ஆகும்.}$$

$u+du<x+y+z>u$ என்ற எல்லையில் $F(x+y+z)$, அல்லது $F(u)$

இவற்றால் பெருக்க $\frac{d}{du}\int\int\int F(x+y+z)\;x^{l-1}\cdot y^{m-1}\cdot z^{n-1}\;dz\cdot dy\cdot dx$

$$=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}\,F(u)\cdot u^{l+m+n-1}$$

தொகையிட,

$$\therefore\int\int\int F(x+y+z)\,x^{l-1}\cdot y^{m-1}\cdot z^{n-1}\cdot dz\,.\,dy\cdot dx$$

$$=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}\int_0^h F(u)\,u^{l+m+n-1}\cdot du$$

$x+y+z<h$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் தொகையீடு அமையும்.

§ 89. தொகையீட்டு வரிசை மாற்றம் (Change of Order of Integration)

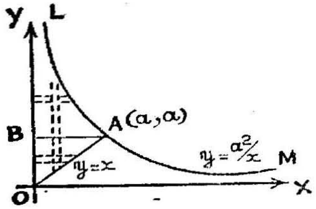
$\int\int f(x,y)\,dy\cdot dx$ என்ற தொகையீட்டில் x, y களின் எல்லைகள் மாறிலியாகவிருப்பின் வரிசையை மாற்றி x-ஐ யொட்டி முதலில் தொகையிடலாம். ஆனால், ஒன்றின் எல்லைகள் மற்றதன் சார்பாக இருக்குமானால் இவ்வாறு வரிசை மாற்றுமுன் x, y களின் இணைப்புக் கட்டுப்பாட்டைக் கண்டு எல்லைகளையும் ஏற்றவாறு மாற்ற வேண்டும். இங்கு வடிவ கணிதவிளக்கம் மாற்றத்தைத் தெளிவாக்கும்.

எ. கா. 1.

$$x = a \quad y = \frac{a^2}{x}$$

$$U = \int_{x=0} \int_{y=x} f(x, y)\, dy \cdot dx$$

இங்கு,



படம் 106

y-ன் எல்லை $y = x$ என்ற கோடும், $xy = a^2$ என்ற அதிபரவளைவும். தொகையிடும் வெளி y-அச்சு, அதிபரவளைவு AL, $y = x$ என்றகோடு OA, இவை அடைக்கும் முழு பரப்பாகும்.

A அதிபரவளைவின் உச்சி

AB-யை Y-அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரைக.

$\int \int f(x, y)\, dy \cdot dx$-ல் தொகுபடும் வரிசை முதலில் x-ஐ மாறிலியாகக் கருதி y-ஐ யொட்டித் தொகையிடல் அதாவது, அடைபட்ட பரப்பை Y-அச்சுக்கிணையாக $\triangle x$ இடைவெளியில் கோடுகள் வரைந்து பல நீள் சதுரங்களாக்கி, ஒவ்வொன்றையும் $\triangle y$ அகலமுள்ள எண்ணற்ற நுண்பரப்புகளாக எடுத்து,

$$\left[\underset{\triangle y \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{x}^{\frac{a^2}{x}} \triangle y \right] \triangle x \cdot \text{காணல்.}$$

இப்போது தொகையீட்டு வரிசை மாறும்போது $\int \int f(x, y)\, dx \cdot dy$ 'எனவாகும். இங்கு, y-ஐ மாறிலியாகக் கருதி $\triangle y$ இடைவெளியில் x-அச்சுக்கு இணையாகக் கோடுகள் வரைந்து நுண்ணிய நீள் சதுரங்கள் செய்கிறோம்.

படத்திற்காட்டியவாறு பரப்பு இரு கூறுகிறது. ஒன்று $\triangle OAB$, மற்றது மிகுந்த பரப்பு BAL. ஒவ்வொரு கூறுக்கும் x-ன் எல்லைகள் வேறுபடுவதைக் காணலாம்.

$\triangle OAB$-ல் x-ன் எல்லைகள் OB யிலிருந்து OA வரையிலும் அதாவது $x = 0,\ x = y$ (y-ன் எல்லைகள் $0, a$).

BAL-ல் x-ன் எல்லைகள் BY யிலிருந்து வளைவரை AL வரையிலும் அதாவது

$$x = 0,\ x = \frac{a^2}{y}\ (y\text{-ன் எல்லைகள் } a, \infty)$$

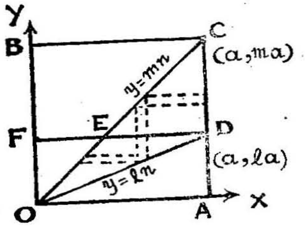
$$\therefore \quad U = \int_0^a \int_0^y f(x, y)\, dx\, dy$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^{\frac{a^2}{y}} f(x, y)\, dx \cdot dy.$$

எ. கா. 2.

$$U = \int_0^a \int_{lx}^{mx} V \cdot dy \cdot dx$$

இங்கு $y = lx,\ y = mx,\ x = a$ என்ற கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள ODC பரப்பின் மேல் தொகையிடுகிறோம்.



படம் 107

முதலில் y-ஐ யொட்டித் தொகையிட பரப்பை Y-அச்சுக் கிணையான நீள் சதுரங்களாக்குகிறோம்.

தொகையிடும் வரிசையை $\int \int V\, dx\, dy$ என்று மாற்றி முதலில் x-ஐ யொட்டித் தொகையிட, பரப்பை x-அச்சுக் கிணையான நீள் சதுரங்களாக்க வேண்டும். அப்போது x-ன் எல்லைகள் $\triangle\ ODE$-யில் $x = \frac{y}{m},\ x = \frac{y}{l}$ (y-ன் எல்லைகள் $0, la$).

$\triangle\ EDC$-யில் $x = \frac{y}{m},\ x = a$ (y-ன் எல்லைகள் la, ma).

$$\therefore \; U = \int_0^{la} \cdot \int_{\frac{y}{m}}^{\frac{y}{l}} V\,dx \cdot dy + \int_{la}^{ma} \int_{\frac{y}{m}}^{a} V\,dx \cdot dy$$

எ. கா. 3.

$$\text{(i)} \quad \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} f(x, y)\, dy \cdot dx$$

$$= \int_a^{a} \int_{a - \sqrt{a^2 - b^2}}^{a + \sqrt{a^2 - b^2}} f(x, y)\, dx \cdot dy$$

என நிறுவி

$$\text{(ii)} \quad U = \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} \frac{\phi^1(y)(x^2 + y^2)\, x \cdot dy \cdot dx}{\sqrt{4a^2 x^2 - (x^2 + y^2)^2}}$$

$= \pi a^2 \; [\, \phi(a) - \phi(0) \,]$ எனக்காட்டுக.

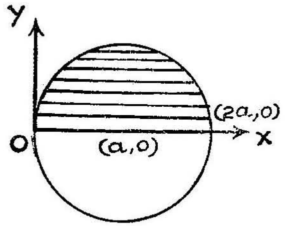
(i) இடது பக்கத் தொகையீட்டில் y-ன் மேல் எல்லை $\sqrt{2ax - x^2}$, கீழ் எல்லை 0

$y = \sqrt{2ax - x^2}$ அல்லது $y^2 = 2ax - y^2$; $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ என்பது ஒரு வட்டம். தொகை இடும் பரப்பு x-அச்சின் மேலுள்ள அரைவட்டம்.

இதில் $x = a \pm \sqrt{a^2 - \,.^2}$

∴ தொகையிடும் வரிசையை மாற்ற, x-ன் எல்லைகள் $a - \sqrt{a^2 - y^2}$, $a + \sqrt{a^2 - y^2}$. படத்திலிருந்து, y-ன் எல்லை மேல் அரை வட்டத்தில் $0, a$ என அறிகிறோம்.

$$\therefore \quad U = \int_0^a \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx \cdot dy$$



படம் 108

(ii) வரிசைமாற,

$$U = \int_0^a \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} \cdot \frac{\phi'(y)(x^2+y^2)\, x\, dx \cdot dy}{\sqrt{4a^2x^2-(x^2+y^2)^2}}$$

$$= \int_0^a \phi'(y)\, dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} \frac{(x^2+y^2)\, x \cdot dx}{\sqrt{4a^2x^2-(x^2+y^2)^2}}$$

$x^2 + y^2 = u$ எனில்

$2x \cdot dx = du$

U-ன் எல்லைகள் $2a^2 + 2a\sqrt{a^2-y^2}$, $2a^2 - 2a\sqrt{a^2-y^2}$

$$\therefore \int \frac{(x^2+y^2)\, x\, dx}{\sqrt{4a^2x^2-(x^2+y^2)^2}} = \int \frac{u \cdot du}{2\sqrt{4a^2(u-y^2)-u^2}}$$

$$= \int \frac{u \cdot du}{2\sqrt{4a^2u - 4a^2y^2 - u^2}}$$

$$= \int \frac{u\, du}{2\sqrt{4a^4-(u-2a^2)^2-4a^2y^2}}$$

$$= \frac{u\,du}{2\sqrt{4a^2(a^2-y^2)-(u-2a^2)^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{(u-2a^2+2a^2)\,du}{\sqrt{4a^2(a^2-y^2)-(u-2a^2)^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{4a^2(a^2-y^2)-(u-2a^2)^2}$$

$$+ a^2\sin^{-1}\left(\frac{u-2a^2}{2a\sqrt{a^2-y^2}}\right)$$

$$\therefore \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} \frac{(x^2+y^2)\,x\,dx}{\sqrt{4a^2x^2-(x^2+y^2)^2}}$$

$$= -\left[\sqrt{4a^2(a^2-y^2)-(u-2a^2)^2}\right]_{u=2a^2-2a\sqrt{a^2-y^2}}^{u=2a^2+2a\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$+ a^2\left[\sin^{-1}\frac{u-2a^2}{2a\sqrt{a^2-y^2}}\right]_{u=2a^2-2a\sqrt{a^2-y^2}}^{u=2a^2+2a\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$= a^2\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \pi a^2$$

$$U = \int_0^a \phi'(y)\cdot \pi a^2\cdot dy = \pi a^2\int_0^a \phi'(y)\,dy$$

$$= \pi a^2\,[\phi(a)-\phi(0)]$$

பயிற்சிகள் 63

1. $U = \int_0^a \int_0^x \frac{f'(y)\,dy\cdot dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$ என்ற தொகையை

வரிசை மாற்றி $\int_0^a \int_y^a \frac{f'(y) \cdot dx \cdot dy}{\sqrt{(a-x)\,(x-y)}}$ என நிறுவி,

$$U = \pi\,[\phi(a) - \phi(0)]$$ எனக் காட்டுக.

2. $U = \int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} V\, dy \cdot dx$ என்ற தொகையீடு

வரிசை மாற்ற, $U = \int_0^a \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} V\, dx \cdot dy$

$$+ \int_0^a \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} V\, dx \cdot dy$$

$$+ \int_0^{2a} \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a} V\, dx \cdot dy$$ என நிறுவுக.

3. x, y-ன் மிகை மதிப்புகளுக்கு $x + y < h$ எனில்

$\int\int x^{l-1}\, y^{-1}\, e^{x+y}\, dy \cdot dx = \frac{\pi \cdot (e^h{}_{-1})}{\sin l\pi.}$ எனக் காட்டுக.

4. x, y, z-ன் மிகைமதிப்புகளுக்கு $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

என்பது மெய்யான (real) கோவை எனும்போது

$$\int\int\int \frac{dz \cdot dy \cdot dx}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} = \frac{\pi^2}{8}$$ என நிறுவுக.

§ 90 பன் மாறித் தொகையீடுகளின் அமைப்பு மாற்றம் (Transformation of Multiple Integrals)

$\int\int\int f(x, y, z)\, dz \cdot dy \cdot dx$ என்ற x, y, z மாறிகளுள்ள

மும்மாறித் தொகையீட்டை, u, v, w என்ற ஒன்றுக்கொன்று

சார்பில்லாத (Independent) புதிய மாறிலிகள் கொண்ட அமைப்பாக மாற்றும் முறையைக் காண்போம்.

மாறிலிகளை மாற்றி யமைப்பதென்பது கீழ்க்கண்ட மூன்று வினைகள் கொண்டதாகும்.

1. $f(x, y, z)$ என்ற சார்பை u, v, w மாறிகளின் சார்பாக மாற்றுவது.

2. x, y, z களின் எல்லைகளை u, v, w களின் ஏற்ற எல்லைகளாக முறையே காண்பது.

3. $dx\, dy\, dz$ இருக்குமிடத்து $du\, dv \cdot dw$ பிரதியிடுவது.

முதலிரு வினைகளும் இயல் கணித வாயிலாக வருபவை. மூன்ருவதான $dx\, dy\, dz$ என்ற வகைக் கெழுக்களின் வகைகள் $du\, dv \cdot dw$ என மாற்றமுறுவதை இங்கு விளக்குவோம்.

தொகையீட்டை

$\int dx \int dy \int f(x, y, z)\, dz$ என்ற வரிசையில் மதிப்பிடும்பொழுது x, y களை மாறிலிகளாகக் கருதி z ஐ யொட்டித் தொகையிடுகிறேம். ஆதலால், z இருக்குமிடத்து w வர, கொடுக்கப்பட்ட சமன் பாடுகளிலிருந்து z-ஐ x, y, w உறுப்புக்கள் கொண்ட ஒரு கோவையெனக் கொள்ளலாம். அப்பொழுது dz ஐ $\frac{dz}{dw} \cdot dw$ என மாற்றக்கூடும்.

பிறகு, y-ஐ ஒட்டிய தொகையீட்டை v-ஐ யொட்டி மாற்ற y-ஐ v, w, x உறுப்புகள் கொண்ட கோவையாகக் கொண்டு dy ஐ $\frac{dy}{dv} \cdot dv$ என மாற்றலாம். அடுத்ததாக, dx ஐ $\frac{dx}{du} \cdot du$ என மாற்றக்கூடும். இறுதியாக dx, dy, dz இருக்குமிடத்து $\frac{dz}{dw} \cdot \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dx}{du} \cdot du\, dv \cdot dw$ இடம் பெறும். இம் மாற்றத்தில் தொகையிடும் வரிசை மாற்றம் பெறுவது கவனிக்கத்தக்கது.

இவ்வாறு மாறிய அமைப்பு

$$\int\int\int g(u, v, w)\ \frac{dz}{dw}\cdot\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dx}{du}\ du\ dv\cdot dw \cdot$$ இங்கு $f(x, y, z)$ ஆனது $g(u, v, w)$ என புதிய மாறிகள் ஏற்ற சார் பாகும்.

குறிப்பு : $dx\ dy\ dz$ என்ற வகைகளில் (Differentials) பிரதி யிடும் வரிசையை எவ்வாறு வேண்டினும் மாற்றக்கூடும். முதலில் x இருக்குமிடத்து u வர வேண்டுமானல் x-ஐ u, y, z உறுப்பு களாலானது எனக் கொண்டு dx ஐ $\frac{dx}{du}\cdot du$ என எழுதலாம், பிறகு மற்றவை முன்பு கண்டவாறே. எடுத்துக்காட்டாக,

x, y, z மாறிகளை துருவ ஆய அளவுகள் r, θ, ϕ என மாற்றம் பெறுவதைக் காண்போம்.

$$x = r \sin\theta\cdot\sin\phi,\ y = r\sin\theta\cdot\cos\phi,\ z = r\cos\theta$$

இவற்றிலிருந்து,

$$x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta\ (\sin^2\phi + \cos^2\phi) = r^2\sin^2\theta\cdot$$

$$\therefore\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$$x^2 = r^2 - y^2 - z^2 \qquad \ldots(\text{i})$$

$$z = r\cos\theta \qquad \ldots(\text{ii})$$

$$y = r\sin\theta\cdot\cos\phi \qquad \ldots(\text{iii})$$

சமன்பாடு (i)-ல், x ஆனது புதிய மாறி r, முன்பிருந்த y, z இவற்றின் கோவையாகவுள்ளது.

$$\therefore\ 2x\cdot\frac{dx}{dr} = 2r;\ \frac{dx}{dr} = \frac{r}{x} = \frac{r}{r\sin\theta\cdot\sin\phi}$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dr} = \frac{1}{\sin\theta\sin\phi}$$

சமன்பாடு (ii)-ல் z ஆனது புதிய மாறிகள் θ, r இவற்றின் கோவை

$$\therefore\ \frac{dz}{d\theta} = -r\sin\theta.$$

சமன்பாடு (iii)-ல் y ஆனது புதிய மாறிகள் ϕ, r, θ இவற்றின் கோவை

$$\frac{dy}{d\phi} = -r\sin\theta\cdot\sin\phi$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dr}\cdot\frac{d.}{d\theta}\cdot\frac{dy}{d\phi} = \frac{1}{\sin\theta\cdot\sin\phi}\cdot(-r\sin\theta)\cdot(-r\sin\theta\sin\phi)$$
$$= r^2\sin\theta.$$

எனவே தொகையீட்டில் நுண் பருமம் $dx\,dy\,dz$ வருடமிடத்து $\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dz}{d\theta}\cdot\frac{dy}{d\phi}\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\phi$ அதாவது $r^2\sin\theta\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\phi$-ஐ ஈடு செய்ய வேண்டும். இப்பிரதியீட்டை வடிவ கணித விளக்கத்தில் (§ 98)-ல் கண்டோம்.

§ 100 சார்புத்துணைக் கோவை (Jacobian).

புது மாறிகளுக்கேற்ப பன்மாறித் தொகை ஈட்டின் அமைப்பு மாற்றத்தில் $dx\cdot dy\cdot dz$ வருமிடத்து $\partial\,(x, y, z)\ du\cdot dv\cdot dw$ ஐப் பிரதியிட வேண்டும் [வகை நுண் கணிதத்தில் காண்க].

வகை நுண் கணிதப்படி இங்கு சார்புத்துணைக் கோவை (Jacobian)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial n}{\partial u}\cdot & \frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\cdot & \frac{\partial y}{\partial v}\cdot & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u}\cdot & \frac{\partial z}{\partial v}\cdot & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial\,(x, y, z)}{\partial\,(u, v, w)}$$

$$\therefore\quad dx\cdot dy\cdot dz = \| J \|\ du\cdot dv\cdot dw$$

குறிப்பு: $J = \dfrac{d\,(x, y, z)}{d\,(u\,v\,w)}$ எனவும் எழுதுகின்றோம்.

எடுத்துக் காட்டு.

$\int\int\int V\,dx\cdot dy\cdot dz$ என்ற தொகையீட்டை துருவ ஆய அளவுகள் r, θ, ϕ மாறிகளில்

$x = r \sin\theta \cdot \sin\phi,\ y = r \sin\theta \cdot \cos\phi,$

$z = r\cos\theta$ என்ற சமன்பாடுகளைக் கொண்டு மாற்றியமைக்க.

$x = r\sin\theta \cdot \sin\phi,\ y = r\sin\theta \cdot \cos\phi$

$z = r\cos\theta \cdot$ என்றவற்றிலிருந்து

$x^2 = r^2 - y^2 - z^2 \quad (r, y, z$ களின் சார்பு)

$z = r\cos\theta \qquad (r, \theta$ களின் சார்பு)

$y = r\sin\theta \cdot \cos\phi \ (r, \theta, \phi$ களின் சார்பு)

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{r}{x}\,\frac{1}{\sin\theta\cdot\sin\phi},\ \frac{\partial x}{\partial\theta} = 0,\quad \frac{\partial x}{\partial\phi} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\cdot\cos\phi,\ \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta\cdot\cos\phi \quad \frac{\partial y}{\partial\phi}$$

$$= -r\sin\theta\sin\phi.$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta} = -r\sin\theta,\ \frac{\partial z}{\partial\phi} = 0$$

$$\therefore\ J \begin{vmatrix} \frac{1}{\sin\theta\cdot\sin\phi} & 0 & \theta \\ \sin\theta\cdot\cos\phi, & r\cos\theta\cdot\cos\phi, & -r\sin\theta\cdot\sin\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cdot\sin\phi}(0 - r^2\sin^2\theta\cdot\sin\phi)$$

$$= -r^2\sin\theta$$

$$\therefore\ |J| = r^2\sin\theta$$

$$\therefore\ \int\int\int V\,dx\cdot dy\cdot dz = \int\int\int Vr^2\sin\theta\cdot dr\,d\theta\,d\phi$$

§ 101. புதிய மாறிகள் u, v, w என்பவை x, y, z உடன் உட்படு சார்புகளாக (Implicit Functions) இருந்தால், சார்புத்துணைக் கோவை (Jacobian) காண்பது.

உட்படு சார்புகள்

$F_1\ (x, y, z,\ u, v, w) = 0$

$F_2\ (x, y, z,\ u, v, w) = 0$

$F_3\ (x, y, z,\ u, v, w) = 0$ என்ற

சமன்பாடுகளானல்,

சார்புத்துணைக்கோவை,

$$\frac{d(x\,y\,z)}{d(u,\,v\,w)} = \frac{\dfrac{d(F_1\,F_2\,F_3)}{d(u\,v\,w)}}{\dfrac{d(F_1\,F_2\,F_3)}{d(x\,y\,z)}}$$

$$= \frac{J_1}{J_2}$$

$$\therefore \quad dx\,dy\,dz = \frac{J_1}{J_2}\,du \cdot dv \cdot dw$$

J_1—புதுமாறிகளையொட்டி சமன்பாடுகளின் சார்புத்துணைக் கோவை.

J_2—முதல் மாறிகளையொட்டி சமன்பாடுகளின் சார்புத்துணைக் கோவை.

எ. கா. 2.

$$x = \frac{v\;w}{u},\; y = \frac{w \cdot u}{v},\; z = \frac{uv}{w}$$

என்றால்,

$$\int\int\int V\,dx\,dv \cdot dz = 4\int\int\int V\,du\,dv\,dw$$ எனக்காட்டு.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{vw}{u^2},\quad \frac{\partial x}{u} = \frac{w}{u},\quad \frac{\partial x}{\partial w} = \frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{w}{v},\quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{wu}{v^2},\quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{u}{v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{v}{w},\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u}{w},\quad \frac{\partial z}{\partial w} = -\frac{uv}{w^2}$$

$$\therefore \quad J = \begin{vmatrix} -\dfrac{vw}{u^2} & \dfrac{w}{u} & \dfrac{v}{u} \\ \dfrac{w}{v} & -\dfrac{w \cdot u}{v^2} & \dfrac{u}{v} \\ \dfrac{v}{w} + & \dfrac{u}{w} & -\dfrac{uv}{w^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{uvw}{uvw} \begin{vmatrix} -\frac{v}{u} & 1 & \frac{v}{w} \\ \frac{w}{u} & -\frac{w}{v} & 1 \\ 1 & \frac{u}{v} & -\frac{u}{w} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{v}{u}\left(\frac{u}{v} - \frac{u}{v}\right) + 1\,(1 + 1) + \frac{v}{w}\left(\frac{w}{v} + \frac{w}{v}\right)$$

$$= 0 + 2 + 2 = 4$$

$$\therefore \int\int\int V \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int\int\int V \cdot du \cdot dv \cdot dw$$

எ. கா. 3.

$$I = \iiint f\,(x + y + z)\;\; x^{\,l-1} \cdot y^{\,m-1} \cdot z^{\,n-1}\; dx \cdot dy \cdot dz$$

$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l + m + n)} \int_0^1 f(u)\, u^{\,l+m+n-1}\, du$$

என நிறுவுக. இங்கு $x + y + z < 1$ என்றும் x, y, z மதிப்புகள் **மிகை** என்றும் கொள்க.

$x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uv \cdot w$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$x = u - uv = u\,(1 - v)$$

$$y = uv - uv \cdot w = uv\,(1 - w)$$

$$z = uvw$$

$$\therefore J = \begin{vmatrix} 1 - v & -u & 0 \\ v\,(1 - w) & u\,(1 - w) & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}$$

$$= (1 - v)\,[\,u^2 v\,(1 - w) + u^2 vw\,] + u\,[\,uv^2\,(1 - w) + uv^2 w\,]$$

$$= (1 - v)\, u^2 v + u^2 v^2 = u^2 v$$

$$\therefore \quad I = \int\int\int f(u)\, u^{l-1} \cdot (1-v)^{l-1} (uv)^{m-1} \cdot (1-w)^{n-1} (uvw)^{n-1} \times u^2 v \, du\, dv\, dw$$

$$= \int\int\int f(u)\, u^{l+m+n-1}\, v^{m+n-1}\, w^{n-1} \times (1-v)^{l-1} \times (1-w)^{m-1} \cdot du\, dv\, dw$$

u, v, w-ன் எல்லைகளொவ்வொன்றும் 0, 1 என அறியலாம்.

$$\therefore \quad I = \int_0^1 f(u)\, u^{l+m+n-1} \cdot du \int_0^1 v^{m+n-1} (1-v)^{l-1}\, dv \times \int_0^1 w^{n-1} (1-w)^{m-1}\, dw$$

$$= \int_0^1 f(u)\, u^{l+m+n-1}\, du \int_0^1 v^{m+n-1} (1-v)^{l-1}\, dv \times \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$$

$$= \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)} \int_0^1 (u)\, u^{l+m+n-1}\, du \; \frac{\Gamma(m+n)\,\Gamma(l)}{\Gamma(m+n+l)}$$

$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+l)} \int_0^1 f(u) \cdot u^{l+m+n-1} \cdot du$$

எ. கா. 4.

$x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ இவை யுள்ளடக்கிய முக்கோணத்தின் மீது தொகையிட $\int\int [\, xy\,(1 - x - y)\,]^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy = \frac{2\pi}{105}$ எனக் காட்டுக.

$x + y = u,\ y = uv$ எனப் பிரதியிட

$x = u(1-v),\ y = uv$ என மாறும்.

$$J = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u - uv + uv = u$$

$$xy(1-x-y) = u(1-v)\cdot uv(1-u)$$

$$= u^2 v(1-u)(1-v)$$

$$\therefore\quad I = \int_0^1\int_0^1 uv^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{1}{2}}\,u\,du\,dv$$

$$= \int_0^1 u^2(1-u)^{\frac{1}{2}}\,du\int_0^1 v^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{3}{2}}\,dv.$$

$$= \int_0^1 u^{3-1}(1-u)^{\frac{3}{2}-1}\,du\int_0^1 v^{\frac{3}{2}-1}(1-v)^{\frac{5}{2}-1}\,du$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(3)}\int_0^1 u^{3-1}(1-u)^{\frac{3}{2}-1}\cdot du$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(3)}\cdot\frac{\Gamma(3)\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})}$$

$$= \frac{[\Gamma(\frac{3}{2})]^3}{\Gamma(\frac{9}{2})} = \frac{(\frac{1}{2})^3\,[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{2\,[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}{105} = \frac{2\pi}{105}$$

எ. கா. 5.

மதிப்பிடுக $\displaystyle\iint\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy,\ x^2+y^2 \le 1$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ என்போம்.

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 1$-லிருந்து $r^2 = 1 \quad \therefore\ r = 1$

r-ன் எல்லைகள் $0, 1$

θ-ன் எல்லைகள் $0, \frac{\pi}{2}$

$$\therefore\ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\ r\,dr \cdot d\theta.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\ d\left(\frac{r^2}{2}\right) \right] d\theta.$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\ dx \right] d\theta \ ; \ u = r^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \frac{1-u\ du}{\sqrt{1-u^2}} \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2}\right)_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} (\pi - 2)$$

பயிற்சி 64

1. $\int\int\int\int v\, dx \cdot dy \cdot dz \cdot dw$ என்ற பன்மாறித் தொகையீட்டை
$x = r \cos\theta \cdot \cos\phi$

$y = r \cos\theta \cdot \sin\phi$

$z = r \sin\theta \cdot \cos\psi$

$w = r \sin\theta \cdot \sin\psi$

என்று பிரதியிட்டு மாறியது

$\int\int\int\int v,\ r^3 \sin\theta \cdot \cos\theta\, dr \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot d\psi$ என நிறுவுக.

2. எல்லா மிகை மதிப்புகளுக்கும் $x + y < k$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $u = \int\int f(x + y)\, x^{l-1}\, y^{m-1}\, dx\, dy$-ன் மதிப்பு

$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l + m)} \int_0^k f(u)\, u^{l+m-1}\, du$$ என நிறுவுக.

3. எல்லா மிகை மதிப்புகளுக்கும் $x + y + z < a$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$\int\int\int f(x + y + z)\, x^{l-1} y^{m-1}\, z^{n-1}\, dx \cdot dy \cdot dz.$ -ன்

மதிப்பு $\dfrac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)} \displaystyle\int_0^a f(u) \cdot u^{l+m+n-1}\,du$

எனக் காட்டுக.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(ax+by)\,a'x+b'y)\,dx \cdot dy$

$$= \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)\,dx\,dy$$

எனக்காட்டுக.

இங்கு, $k = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

விடைகள்

பயிற்சிகள் 1 (a)

[மாறிலி 'C'-யைச் சேர்த்துக் கொள்ளவும்]

1. $\frac{x^8}{8}$, $5x^7$, $-\frac{1}{7x^7}$, $\frac{-3}{x^5}$, $\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}$, $\frac{-2}{3}x^{-\frac{3}{2}}$

2. $3x^4 - x^3 + 3x^2 + 3x$

3. $-\frac{1}{2x^2}$, $-\frac{1}{10x^{10}}$, $2\sqrt{x}$, $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$,

 $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$, $\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}$, $\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}$

4. $\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}$, $\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$, $\frac{n}{(n-1)}x^{\frac{n-1}{n}}$, $\frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}}$

5. $2x^7 - 3x^5 + 2x^3 + x$

6. $\frac{x^8}{8} + \frac{5}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + x^2 - 5x$

7. $-\frac{2}{x^5} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x} - x$

8. $\frac{p}{5}x^5 + \frac{q}{4}x^4 + \frac{r}{3}x^3 + \frac{s}{2}x^2 + tx$

9. $-\frac{a}{4x^4} - \frac{b}{3x^3} - \frac{c}{2x^2} - \frac{d}{x}$

10. $-\dfrac{(2-5x)^3}{15}, x - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^7}{7}$

11. $-\dfrac{(a-x)^4}{4}, a^3 x + a^2 x^3 + \dfrac{3}{5} a x^5 + \dfrac{x^7}{7}$

12. $4 \log x + \dfrac{12}{x} - \dfrac{9}{x^2}$

13. $p \dfrac{x^{3-n}}{3-n} + q \dfrac{x^{2-n}}{2-n} + r \dfrac{x^{1-n}}{1-n}$

14. $x + \dfrac{6}{x} - \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{8}{5x^5}$

15. $ac \dfrac{x^3}{3} + (ad + bc) \dfrac{x^2}{2} + bdx$

16. $\dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x + 2\sqrt{x}$

பயிற்சிகள் 1 (b)

1. $y = 2x^4 - x^2 - 20$

2. $y = 10 - \dfrac{6}{x}$

3. $y = \dfrac{5}{2} - \cos x$

4. $y = \dfrac{3}{2} x^2 - 4x + C.$

5. $y = 2x + \dfrac{3}{x} + C$

6. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$

7. $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{7}{2}$

8. $y = 2\sqrt{x} + 1, y = 2\sqrt{x} + 9$

பயிற்சிகள் 1 (c)

1. $\sin x - \cos x$

2. $-\cot x - x$

3. $-2 \cot 2x$

4. $-5 \cot x - 4 \operatorname{cosec} x$

5. $2 \tan x + \sec x$

6. $-2 \cot 2x$

7. $5 \sin x - 3 \log x - e^{-x}$

8. $2 \cot x + 3 \tan x$

9. $-\cot x - x.$

10. $-\sqrt{2} \cos x$

பயிற்சிகள் 2

1. $\frac{x^4}{4}$, $\frac{(5+x)^4}{4}$, $-\frac{(5-x)^4}{4}$, $\frac{(4x-3)^4}{16}$, $\frac{(ax+b)^4}{4a}$

2. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, $\frac{(2x+3)^{n+1}}{2(n+1)}$, $-\frac{(5-2x)^{n+1}}{2(n+1)}$

   $\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$, $-\frac{(c-dx)^{n+1}}{d(x+1)}$

3. $-\cos x$, $\frac{\sin 4x}{4}$, $-\frac{1}{m}\cos mx$, $4\sin\frac{x}{4}$,

   $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$, $\frac{1}{b}\cos(a-bx)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

4. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$, $-\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}}$, $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}$,

   $\frac{2a}{3}\left(1+x\right)^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{a}\,\frac{x^2}{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}}$

5. $-\frac{1}{2x^2}$, $\frac{p}{4(5-2x)^2}$, $-\frac{1}{6(3x+1)^2}$, $\frac{1}{2q(p-qx)^2}$,

   $-\frac{1}{2a(ax-b)^2}$

6. $\tan x$, $\tan(x+\alpha)$, $\frac{1}{n}\tan nx$, $n\tan\frac{x}{n}$, $\frac{1}{a}\tan(ax+b)$

7. $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$, $\frac{1}{2(n-1)(2x-3)^{n-1}}$,

   $\frac{1}{2(n-1)(3-2x)^{n-1}}$, $\frac{1}{(n-1)(a-x)^{n-1}}$

   $\frac{-1}{p(n-1)(px-q)^{n-1}}$

8. $\frac{-2}{\sqrt{x}}$, $\frac{-2}{\sqrt{x-1}}$, $\frac{2}{\sqrt{1-x}}$, $\frac{2}{5\sqrt{2-5x}}$, $\frac{2}{p\sqrt{px+q}}$

9. $\frac{(5y-3)^{}}{30}$, $-\frac{2}{5b}(a-bt)^{\frac{5}{2}}$, $\frac{n}{b(n+1)}(a+bz)^{\frac{n+1}{n}}$

10. $-\frac{1}{2}(4-3t)^{}$, $\frac{2}{\sqrt{1-n}}$, $\frac{1}{6(a-3z)^2}$

11. $-\frac{(p-t)^{q+1}}{(q+1)}$, $\frac{1}{3(n-)(9-2n)^{n-1}}$,

$-\frac{(+b-ny)^{\frac{n-1}{n}}}{(n-1)}$

12. $\frac{1}{3}\sin 3\theta$, $-2\cos\frac{\theta}{2}$, $-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$,

$\frac{1}{n}\sin(n\theta+2)$

13. -1.

14. $y=\frac{1}{6}(2-3x)^4+cx+D$

15. $y=-2\sin 2x$.

16. $\frac{(x-2)^2}{2(1-x)}$

பயிற்சிகள்-3

1. $y=\frac{1}{2}kx^2+c$.
2. $y^2=kx^2+c$.
3. $y=\frac{kx^{n+1}}{n+1}+c$.
4. $y^2=2kx+c$.
5. $x^2+y^2=2kx+c$.
6. $ky^2-x^2=c$.
7. $y^2=kx^2+c$.
8. $ky^2=2x+c$.

9. $x\bar{y} = 14x - 8$

10. $y = 3x - 3 + \frac{4}{x}$

11. $y = 4x - x^2$

12. $5y = 22x - 21 - x^3$

13. $y = x^2(3 - 2x)$

14. $y = 9x^2 - 3x - 38 + \frac{32}{x^2}$.

பயிற்சிகள் 4

1. 65 அடி/நொ, 132 அடி

2. $n + \frac{12}{\pi}$, $3x + \frac{72}{\pi^2}$

3. $74\frac{2}{15}$ அடி, $73\frac{1}{3}$ அடி/நொ

4. 32 அடி

5. 12 அடி/நொ, 216 அடி

6. 7·75 அடி/நொ

7. $y^3 = 8x^2$

8. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

பயிற்சிகள் 7

1. $\frac{2}{3}(x^2 + 1)$

2. $\frac{1}{4}(2\theta - \sin 2\theta)$

3. $\frac{1}{12}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$.

4. $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x$

5. $e^{\tan^{-1}x}$

6. $\frac{1}{n\cos^n x}$

7. $\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x$

8. $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$

9. $\frac{1}{8b(a + b\cot\theta)^8}$

10. $\frac{1}{(1-n)(\log x)^{n-1}}$

11. $\log 2$

12. $\log(\log x)$

13. $\log(x + \sin x)$

14. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$

15. $\frac{a^{x^n}}{n\log a}$

16. $-\frac{1}{b}e^{3a + b\cos\theta}$

17. $-e^{\cos^2\theta}$

18. $e^{\sin^2 x + \cos x}$.

19. $2 \sin x - \log(\sec x + \tan x)$

20. $\sin^{-1}x - \sqrt{1 - x^2}$ 21. $\dfrac{a^2(\pi - 2)}{4}$

22. $\log(e^x - 1)$ 23. $\dfrac{-1}{e^x + 1}$

24. $2e^{\frac{x}{2}} + 2\log\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$

25. $2\left[\sqrt{e^x - 1} - \tan^{-1}\sqrt{e^x - 1}\right]$

பயிற்சிகள் 8

1. $\sec(\log x)$ 2. $\frac{1}{3}\tan(3x+2) + \frac{1}{6}\sin 6x$

3. $\frac{1}{4}(\sin^4 x + \cos^4 x)$ 4. $-\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{6}\cos 3x$

5. $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x$

6. $\dfrac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} - \dfrac{\cos(n+m)x}{2(n+m)}$

7. $\dfrac{\sin(m-n)}{2(m-n)}x - \dfrac{\sin(m+n)}{2(m+n)}x$

8. $\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{20}\sin 5x$

9. $-\frac{1}{8}\left[\cos 2x + \cos 4x + \frac{1}{3}\cos 6x\right]$

10. $\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{12}\cos 3x + \frac{1}{20}\cos 5x - \frac{1}{28}\cos 7x$

11. $\frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x$

12. $\dfrac{\pi}{8}$ 13. $\dfrac{-1}{n(\sec\theta + \tan\theta)^n}$

14. $\dfrac{n}{n^2 - 1}$ 15. $\dfrac{1}{n^2 - 1}$

பயிற்சிகள் 9-A

1. $\frac{1}{5}x^5(\log x - \frac{1}{5})$ 2. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}[\log x - \frac{2}{3}]$

3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\log x - \frac{1}{n+1}\right]$ 4. $-\frac{(1+\log x)}{x}$

5. $-x\cos x + \sin x$ 6. $\frac{x}{m}\sin mx + \frac{\cos mx}{m^2}$

7. $e^x(x-1)$ 8. $\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x$

9. $\frac{1}{4}(x^4 - 1)\tan^{-1}x + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{\sqrt{2}}$

10. $\frac{-e^{3x}}{9}(3x+1)$ 11. $x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$

12. $x(\log x - 1) + \frac{x^4}{16}(4\log x - 1)$

13. $x\tan x + \log\cos x$

14. $\frac{1}{m^2}\log(\sin mx) - \frac{1}{m}(x\cot mx)$

15. $\frac{2x^2-1}{4}\sin^{-1}x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$

16. $x\sin hx - \cos hx$ 17. $x\cos hx - \sin hx$

18. $x\sin h^{-1}x - \sqrt{ + x^2}$

19. $x\tan x + \log\cos x - \frac{x}{2}$

20. $(2x+3)^{n+1}\frac{(2nx+2x-3)}{4(n+1)(n+2)}$

21. $\frac{-2}{63}(a-x)^{\frac{7}{2}}(7x+2a)$

22. $\frac{(nx-n-1)}{(n-1)(n-2)(1-x)^{-1}}$

23. $\frac{e^{ax+b}}{a^2}[apx + aq - p]$

24. $x \log (x^2 + a^2) - 2x + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a}$

25. $\frac{-1}{x} \log (a^2 + x^2) + \frac{2}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$

26. $\frac{2}{3} (x - 2a) \sqrt{a + x}$.

பயிற்சிகள் 9 – B

1. $\frac{x}{2} \sqrt{32 + 2x^2} + 8 \sqrt{2} \sin h^{-1} \frac{x}{4}$

2. $\frac{(x+1)}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 10} + \frac{9}{2} \sin h^{-1} \frac{x+1}{3}$

3. $\frac{2x+5}{4} \sqrt{6 - 5x - x^2} + \frac{49}{8} \sin^{-1} \left[\frac{2x+5}{7}\right]$

4. $\frac{6x+5}{12} \sqrt{8 - 5x - 3x^2} + \frac{121}{72} \sqrt{3} \sin^{-1} \frac{6x+5}{11}$

5. $\frac{3x+2}{6} \sqrt{3x^2 + 4x - 7} - \frac{25}{18} \sqrt{3} \cosh^{-1} \left(\frac{3x+2}{5}\right)$

6. $\frac{1}{6} (3x - 1) \sqrt{3x^2 - 2x} - \frac{\sqrt{3}}{18} \cosh^{-1} (3x - 1)$

7. $\frac{1}{13} e^{2x} [2 \sin 3x - 3 \cos 3x]$

8. $\frac{1}{2a^2} e^{-ax} (\sin ax + \cos ax)$

9. $\frac{e^{2x}}{4} (1 + \sin 2x + \cos 2x)$

10. $\frac{2}{37} e^{3x} \left(6 \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)$

11. $\frac{e^{2x}}{20} [2 \sin 4x - 4 \cos 4x]$

12. $\frac{1}{2} [\sinh x \cdot \sin x - \cosh x \cos x]$

13. $\frac{1}{13} [2 \cosh 2x \cdot \cos 3x + 3 \sinh 2x \cdot \sin 3x]$

14. $\frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin bx \cdot \cosh ax - b \cos bx \cdot \sinh ax]$

15. $\dfrac{-L e^{-\frac{Rt}{L}}}{R^2 + p^2 L^2} [R \sin pt + pL \cos pt]$

16. $\dfrac{a^x}{(\log a)^2} [x \log a - 1]$

17. $-\dfrac{1}{4x^2} (1 + \log x^2)$

18. $x [\log x - 1] + \dfrac{x^4}{16} (4 \log x - 1)$

19. $[\log(\log x) - 1] \log x$. 20. $\dfrac{e^x}{x+1}$

21. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} (\log x)^2 - \dfrac{2x^{n+1}}{(n+1)^2} \log x + \dfrac{2x^{n+1}}{(n+1)^3}$

பயிற்சிகள் 10

1. $\dfrac{2}{7a} (ax + b)^{\frac{7}{2}}$ 2. $\dfrac{(3x - 2)^8}{24}$

3. $\dfrac{-(3 - 2x)^{\frac{3}{2}}}{3}$ 4. $\dfrac{-1}{10 (5x + 2)^2}$

5. $\dfrac{2}{7} \sqrt{7x - 3}$ 6. $e^{\sin x}$

7. x 8. $2 e^{\frac{x}{2}}$

9. $\frac{1}{5} \sec 5x$ 10. $\frac{1}{5} \cot (2 - 5x)$

11. $\frac{1}{6} (3x + \sin 3x)$ 12. $2 \tan \dfrac{x}{2}$

13. $\frac{1}{24} (2 \cos 6x + 3 \cos 4x)$ 14. $\frac{1}{8} [\cos 6x - 3 \cos 2x]$

15. $\frac{1}{64} (\cos 6x - 3 \cos 2x)$ 16. $\frac{1}{3} \tan^{-1} (x^3)$

17. $- \cos (\tan^{-1} x)$ 18. $\dfrac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\dfrac{b}{a} \tan x\right)$

19. $\dfrac{1}{3} \sin^{-1} \left(\dfrac{3x}{4}\right)$ 20. $\dfrac{1}{12} \tan^{-1} \left(\dfrac{3x}{4}\right)$

21. $\frac{1}{24}\log\left(\frac{3x-4}{3x+4}\right)$

22. $-\frac{1}{p}\cos(x^b)$

23. $\frac{1}{2}\sin h^{-1}(x^2)$

24. $\frac{1}{3}\sin^{-1}(x^3)$

25. $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}$

26. $2\sin\sqrt{x}$

27. $-\frac{1}{b}\log(a+b\cos x)$

28. $\log(\tan^{-1}x)$

29. $\frac{1}{2}\log(e^{2x}+1)$

30. $\tan^{-1}(e^x)$

31. $-\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)^{n+1}$

32. $-\cos(\log x)$

33. $\frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}}x$

34. $-\cos(e^{\sqrt{x}})$

35. $-\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

36. $\frac{x+1}{2}\sqrt{8-2x-x^2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x+4}{3}$

37. $\frac{x+4}{2}\sqrt{x^2+8x+25}+\frac{9}{2}\sin h^{-1}\frac{x+4}{3}$

38. $\frac{1}{3}(x^2+ax)^{\frac{3}{2}}-\frac{a}{2}\left[\frac{2x+a}{4}\sqrt{x^2+ax}-\frac{a^3}{8}\cos h^{-1}\frac{2x+a}{a}\right]$

பயிற்சிகள் 11

1. $(2-x^2)\cos x+2x\sin x$

2. $\frac{1}{8}$

3. 1

4. $\frac{7}{9}$

5. $e^{3x}\left[\frac{3\cos 5x+5\sin 5x}{68}+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{12}\right]$

6. $e^{2x}\left[x\ \frac{3\cos 2x+2\sin 2x}{13}-\frac{5\cos 2x+12\sin 2x}{109}\right]$

7. $x\tan^{-1}x-\log\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2$

8. $x(\log x)^2-2x\log x+2x$

9. $\frac{1}{9}[\sin 3x - 3x\cos 3x]$

10. $e^{mx}\left[\frac{1}{2m} - \frac{m\cos 2x + 2\sin 2x}{2(m^2+4)}\right]$

11. $\frac{b}{a^2+b^2}$ 12. $\frac{1}{4}(2t + \sin 2t)$

13. $\frac{1}{12}(\cos 3\theta - 9\cos\theta)$ 14. $e^{\tan^{-1}x}$

15. $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ 16. $\frac{-1}{n\sin^n x}$ 17. $\frac{-\frac{1}{b}}{(a + b\tan\theta)}$

18. $2[\sqrt{e^x - 1} - \tan^{-1}\sqrt{e^x - 1}]$

19. $\frac{1}{10}[\sin 5x + 5\sin x]$

20. $\frac{1}{4}\left[x + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2}\right]$

21. $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\log x - 1]$

22. $e^{3x}\left[\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}X + \frac{2}{27}\right]$

23. $X[\tan x - \sec x] + \log(1 + \sin x)$

24. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$ 25. $\frac{e^x}{1+x}$

26. $e^{\sin x}(\sin x - 1)$ 27. $\frac{1}{2}$.

28. $\left(\frac{2}{27} - \frac{x^2}{3}\right)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x$

29. $\frac{x^3}{6} - \frac{x\cos 2x}{4} + \frac{(1 - 2x^2)}{8}\sin 2x$

30. $\frac{3\pi}{16} + \frac{1}{6}$ 31. $\frac{1}{4}(\pi - 1)$

32. $\frac{e^{x3}}{25}(3\cos 4x + 4\sin 4x)$

33. $e^x \sin x$

34. $\dfrac{e^{m \tan^{-1} x}(m+x)}{(m^2+1)\sqrt{1+x^2}}$

பயிற்சிகள் 12

1. $x - 2\log(x+2)$

2. $\dfrac{x^2}{2} - 2x + 4\log(x+2)$

3. $\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\log(x+2)$

4. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}\log(3x-2)$

5. $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{2}{9}x + \dfrac{4}{27}\log(3x-2)$

6. $-\dfrac{1}{9}[3x + \log(1-3x)]$

7. $-\frac{1}{9}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{27}\log(1-3x)$

8. $\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\log(1-3x)$

9. $-ax - \dfrac{x^2}{2} - a^2\log(a-x)$

10. $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\log(2x+1)$

11. $\dfrac{x}{p} - \dfrac{q}{p^2}\log(px+q)$

12. $\dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{bx}{a^2} + \dfrac{b^2}{a^3}\log(ax-b)$

13. $-\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{ax^2}{8} - \dfrac{a^2x}{8} - \dfrac{a^3}{16}\log(a-2x)$

14. $\dfrac{ax}{c} + \dfrac{bc-ad}{c}\log(cx+d)$

15. $x - 2\tan^{-1}\dfrac{x}{3}$.

பயிற்சிகள் 13

1. $\log(x^2 + 3x + 5)$ 2. $\frac{2}{3}\log(x^3 - 1)$

3. $-\frac{1}{4}\log(a^4 - x^4)$ 4. $\frac{1}{2}\log(x^2 + 2x + 5)$

5. $-\frac{1}{3}\log(x^3 - 6x + 7)$ 6. $\frac{a}{n}\log(b^n + x^n)$

7. $\frac{1}{a}\log \sec ax$ 8. $\frac{1}{b}\log \sin bx$

9. $\frac{1}{6}\log(1 + 3\sin^2 x)$ 10. $\frac{1}{b}\log(a + b\sin x)$

11. $-\frac{1}{a}\log(1 - e^{ax})$ 12. $\frac{3}{4}\log(3 + 4\tan x)$

13. $\frac{x^2}{2} + 2\log(x^2 - 4)$ 14. $x + \log(x^2 + 1)$

15. $\frac{(\sin^{-1} x)}{2}$ 16. $\log(\sin^{-1} x)$

பயிற்சிகள் 14

1. $\frac{1}{3}\log(x - 1) - \frac{1}{6}\log(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$

2. $\frac{1}{2}\log(x^2 + 1) - \log(x + 1)$

3. $-\frac{1}{a^2 x} - \frac{1}{x^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

4. $\frac{2}{9}\log\frac{x - 1}{x + 2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x - 1}\right)$

5. $\log(x - 1) - 5\log(x - 2) + 9\log(x - 3)$

6. $\frac{4}{3}\log(x^3 - 1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\log\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$

7. $2 \log (x - 3) - \dfrac{7}{x - 3}$ 8. $\log \dfrac{4}{3}$

9. $-\log (1 + x^2) + \tan^{-1}x + 2 \log (1 + x)$

10. $\dfrac{1}{27} \log \left(\dfrac{x + 2}{x - 1}\right) - \dfrac{2}{9 (x - 1)} + \dfrac{1}{9 (x + 2)}$

11. $\dfrac{-2}{(x - 1)} + \log (x + 2)$

12. $x - \log (x - 1) + 4 \log (x - 2)$

13. $\log (x + 1) + \frac{1}{3} \log (x - 1) - \frac{5}{6} \log (2x + 1)$

14. $4 \log \left(\dfrac{x - 1}{x - 2}\right) - \dfrac{5}{x - 2}$

15. $\dfrac{1}{a^2 - b^2} \log \left(\dfrac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2}\right)$

16. $\dfrac{x^2}{2} + 3x - \log (x - 1) - 8 \log (x - 2)$

17. $-\frac{1}{20} \log (x^2 + 1) - \frac{3}{10} \log \tan^{-1}x - \frac{1}{2} \log (x + 1)$
$+ \frac{8}{5} \log (x + 2)$

18. $\frac{1}{6} \log (1 - \cos x) - \frac{1}{2} \log (1 + \cos x) +$
$\frac{2}{3} \log (1 + 2 \cos x)$

19. $2 \log \left(\dfrac{x - 2}{x + 3}\right) + \log (x + 2)$

20. $\frac{1}{2} \log (4x^2 + 12x + 7)$

21. $\frac{1}{2} \log (x - 1) + \frac{3}{4} \log (x^2 - 2x + 5) +$
$\dfrac{1}{2} \tan^{-1} \dfrac{(x - 1)}{2}$

22. $\log \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \left[\tan^{-1} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right.$
$\left. + \tan^{-1} \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right]$

23. $2 \log \frac{(x-2)}{9} + \frac{3}{x-2}$

24. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \log x - 3 \log (x+2)$
$+ 5 \log (x-2)$

பயிற்சிகள் 15

1. $\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x+1}{2}$

2. $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{3x-1}{\sqrt{2}} \right)$

3. $\frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}$

4. $\frac{1}{4} \log \frac{x-5}{x-1}$

5. $\tan^{-1}(2x-1)$

6. $\frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}} \right)$

7. $\log (3x^2 - 7x + 11)$

8. $\frac{3}{10} \log (5x^2 - 3x - 2) - \frac{11}{70} \log \frac{x-1}{5x+2}$

9. $\frac{3}{2} \log (x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)$

10. $\frac{2}{3} \log (3x-1) + \frac{1}{2} \log (2x+1)$

11. $\frac{1}{5} \log (5x^2 - x + 2) \frac{-8}{5\sqrt{39}} \tan^{-1} \left(\frac{10x-1}{\sqrt{39}} \right)$

12. $\frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1} \left(\frac{2 \tan x}{\sqrt{7}} \right)$ 13. $\log x - 2 \tan^{-1}(x+1)$

14. $\frac{1}{2\sqrt{5}} \log \frac{\sqrt{5}+x+1}{\sqrt{5}-x-1}$

15. $-\frac{1}{2} \log (6x - 7 - x^2) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}+x-3}{\sqrt{2}-x+3}.$

16. $2 \log (x^2 + 2x + 2) + \tan^{-1}(x+1)$

17. $2 \log (x^2 - 2x - 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \log \frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}$

18. $\frac{3}{4}\log(2x^2+6x+1)-\frac{19}{4\sqrt{7}}\log\frac{2x+3-\sqrt{7}}{2x+3+\sqrt{7}}$

19. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\log(2x^2+2x+41)-\frac{20}{9}\tan^{-1}\frac{(2x+1)}{9}$

20. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{e^y+1}{\sqrt{2}}\right)$

பயிற்சிகள் 16

1. $\frac{1}{4}\log\frac{x^4}{1+x^4}$

2. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

3. $x-\frac{35}{24}\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{25}{48}\tan^{-1}\frac{x}{4}$

4. $\frac{1}{14}\log\left(\frac{x^7}{2x^7+1}\right)$

5. $\frac{1}{2a}$

6. $\frac{1}{12}\log\frac{x-1}{2x+1}$

7. $\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2(1+x^2)^2}$

8. $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}x-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{5}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)$

9. $\frac{1}{5}\log\frac{x^5}{1+x^5}$

10. $\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}(x+2)+\frac{x+2}{x^2+4x+5}\right]$

11. $-\left[\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\tan^{-1}x-\frac{x}{2(1+x^2)}\right]$

12. $\frac{1}{2}\log(a^2+x^2)+\frac{a^2}{2(a^2+x^2)}$

13. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}+\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$

14. $\frac{1}{8}\sqrt{5}\log\left(\frac{\sqrt{5}+x^4-1}{\sqrt{5}-x^4+1}\right)$

பயிற்சிகள் 17

1. $2\sqrt{x^2+x+1}+2\sinh^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

2. $4\sqrt{x^2-6x+18}+13\sinh^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right)$

3. $\sqrt{x^2+2x+2}+\sinh^{-1}(x+1)$

4. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}\right)$ 5. $\frac{1}{3}\cosh^{-1}\left(\frac{6x+5}{5}\right)$

6. $\frac{3}{2}\sqrt{4x^2-x}+\frac{23}{2\sqrt{2}}\cosh^{-1}(4x-1)$

7. $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+5x+6}+\sinh^{-1}\frac{8x+5}{\sqrt{71}}$

8. $\sin^{-1}\frac{2x-1}{3}$ 9. $\sqrt{x^2-3x+2}+$

$\frac{1}{2}\log\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{x^2-3x+2}$

10. $-\sqrt{3-5x+2x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cosh^{-1}(4x-5)$

11. $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}$ 12. $\sin^{-1}\left(\frac{2x^2+5}{7}\right)$

13. $\sin^{-1}(\frac{1}{2}\sin x)$ 14. $\sinh^{-1}(\frac{1}{3}\tan x)$

15. $\left[3+11\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}-11\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\right].$

பயிற்சிகள் 18

1. $\left(\frac{x+1}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+10}+\frac{9}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right)$

2. $\left[\frac{(x-\frac{1}{4})}{2}\sqrt{1+x-2x^2}+\frac{9\sqrt{2}}{32}\sin^{-1}\left[\frac{(4x-1)}{3}\right]\right]$

3. $(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{2}\left[\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\sinh^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$

4. $\frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + 2\sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

5. $\frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x-3} - 2\cosh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

6. $\frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)$

7. $\left[\frac{3x+4}{6}\sqrt{3-8x-3x^2} + \frac{25\sqrt{3}}{18}\sin^{-1}\left(\frac{3x+4}{5}\right)\right]$

பயிற்சிகள் 19

1. $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

2. $-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

3. $\frac{2}{15}\sqrt{x+2}\,(3x^2-8x+32)$

4. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

5. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

6. $2\sqrt{x} - 6\log(3+\sqrt{x})$

7. $\log\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}$

8. $\frac{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}{15}(3x^2-8)$

9. $2\tan^{-1}\sqrt{x-1}$

10. $\frac{2\sqrt{x+5}}{15}(3x^2-20x+200)$

11. $-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin^{-1}\frac{7-2x}{3(x-1)}$

12. $\frac{2}{\sqrt{b-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}$

13. $\frac{2\sqrt{x+1}}{15}(3x^2-4x+23)$

14. $x - 2a\sqrt{x} + 2a^2 \log (a + \sqrt{x})$

15. $\log \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ 16. $-\frac{1}{\sqrt{109}} \sinh^{-1} \frac{109 + 3x}{10x}$

17. $-\sin h^{-1} \frac{2 + x}{\sqrt{3}\, x}$ 18. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin h^{-1} \frac{\sqrt{2}}{x - 1}$

19. $\frac{1}{\sqrt{14}} \log \frac{\sqrt{2(x + 5)} - \sqrt{7}}{\sqrt{2(x + 5)} + \sqrt{7}}$

20. $-\frac{1}{\sqrt{11}} \sin h^{-1} \frac{3 + 5x}{\sqrt{2}\,(1 - 2x)}$

25. $-\sin h^{-1} \frac{x + 1}{2x}$ 26. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

பயிற்சிகள் 20

1. $-\frac{1}{\sqrt{3}} \sinh^{-1} \frac{2 + x}{\sqrt{2}\,(x - 1)}$

2. $3 \sin^{-1} (\frac{1}{3} \sqrt{5 - x}) + \sqrt{(5 - x)(x - 2)}$

3. $\frac{\pi}{ab}$ 4. $\frac{\pi}{8}$ 5. $\frac{\pi}{2}(b - a)$

6. $-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin h^{-1} \left(\frac{6 - x}{\sqrt{\pi}\, x}\right)$

7. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos h^{-1} \left(\frac{4 + x}{3x}\right)$

8. $-\frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\sqrt{2} \left(\frac{2 - x}{x}\right)\right]$

9. $-\sin h^{-1} \frac{1 - x}{\sqrt{3}\,(1 + x)}$

10. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin h^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{x+1}\right)$

11. $-\frac{1}{\sqrt{10}} \sin h^{-1}\left[\frac{9-x}{3(x+1)}\right]$

12. $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} - \sin h^{-1} x\right]$

13. $\log \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$

14. $\frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2}\,(x-2+\cos^{-1} x)\right]$

15. $\sqrt{x^2-1} + \cos h^{-1} x$

16. $a \sin^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$

17. $\frac{1}{4}(2x-3)\sqrt{(x+1)(4-x)} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{2x-3}{5}$

18. $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}$

19. $\frac{-\sqrt{1+x^2}}{x}$

20. $-\frac{1}{3} \sin h^{-1}\left(\frac{1}{x^3}\right)$

21. $\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

22. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

23. $\frac{2}{3a(b-c)}\left\{(ax+b)^{\frac{3}{2}} + (ax+c)^{\frac{3}{2}}\right\}$

24. $\frac{\pi}{z}(a+b)$.

26. $-\log\left(\tan \frac{\pi}{8}\right)$

27. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$

28. $a^2\left(\frac{\pi-2}{4}\right)$

30. $\frac{3\pi}{128}$

31. $\frac{1}{2}\left[\sec^{-1} x + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}\right]$

32. $\frac{x^3}{3(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

33. $\sqrt{x^2 - a^2} - a \sec^{-1}\frac{x}{a}$

34. $2\,[\,\sqrt{e^x - 1} - \tan^{-1}\sqrt{e^n - 1}$

35. $\frac{\pi - 2}{8}$

பயிற்சிகள் 21

1. $\frac{C^7}{7} - \frac{C^5}{5}$

2. $\frac{7}{10}s^{\frac{10}{7}} - \frac{7}{24}s^{\frac{24}{7}}$

3. $\frac{64}{4641}$

4. $-\left(s + \frac{1}{7}\right)$

5. $s - \frac{2}{3}s^3 + \frac{s^5}{5}$

6. $-\frac{C^3}{3} - \frac{C^5}{5}$

7. $x - t + \frac{t^3}{3}$

8. $\log \sin x - \frac{c^3}{3} - \frac{c^5}{5}$

9. $t + t^3 + \frac{3t^5}{5} + \frac{t^7}{7}$

10. $-c - \frac{2}{3}c^3 - \frac{c^5}{5}$

11. $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{x}{2}$

12. $\frac{80}{9\sqrt{3}}$

13. $-\frac{c^9}{9} - \frac{c^{11}}{11}$

14. $\frac{2}{6}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{6}t$

15. $-\frac{c^6}{6} - \frac{c^8}{8}$

16. $\frac{s^7}{7} - \frac{s^5}{5}$

17. $\frac{2}{1}s^{\frac{11}{2}} - \frac{4}{7}s^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}$

18. $2\log t + t\,\frac{^2 - c^2}{2}$

பயிற்சிகள் 22

$$\left[t = \tan\frac{x}{2}\right]$$

1. $\frac{7}{34} x + \frac{11}{34} \log (5 \sin x - 3 \cos x)$

2. $4x - \log (3 \sin x - 2 \cos x)$

3. $\frac{14}{26} x - \frac{35}{29} \log (5 \cos x + 2 \sin x)$

4. $\frac{1}{3} \log \frac{3 + t}{3 - t}$ 5. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{t - 3 - 2\sqrt{2}}{t - 3 + 2\sqrt{2}}$

6. $\log (1 + t)$ 7. $\log t + \frac{2}{1 + t}$

8. $\frac{2}{3} \tan^{-1} \left(\frac{t}{3}\right)$ 9. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \log \left(\frac{2t + 1 - \sqrt{3}}{2t + 1 + \sqrt{3}}\right)$

10. $\frac{\pi}{9}$ 11. $\frac{1}{5} \log 6$

12. $\frac{1}{\sqrt{3}} \log (2 + \sqrt{3})$ 13. $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log (\cos x + \sin x)$

14. $\frac{x}{4} - \frac{5}{6} \tan^{-1} \frac{5t \div 4}{3}$ 15. $\frac{5}{6} \tan^{-1} (2t) - \frac{x}{3}$

16. $\frac{2x}{3} \div \frac{1}{6\sqrt{2}} \log \left[\frac{t + 3 - 2\sqrt{2}}{t + 3 + 2\sqrt{2}}\right]$

17. $\frac{x}{8} - \frac{1}{4} \log (5 + 8 \cos x) + \frac{19}{8\sqrt{39}} \log \left[\frac{\sqrt{13} + \sqrt{}}{\sqrt{13} - \sqrt{}}\right]$

18. $\frac{\pi}{a^2 - b^2}\ (a > b > 0)$ 19. $\frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} (11 - e \sin u)$

பயிற்சிகள் 23

1. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x}{2\sqrt{2}}\right)$ 2. $\frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \tan x\right]$

பயிற்சிகள் 24

1. $-e^{-x}(x^2+2x+2)$

2. $\dfrac{e^{2x}}{8}(4x^3-6x^2+6x-3)$

3. $e^x(x^2-6x+10)$ 4. $\dfrac{x\sin ax}{a^2}+\dfrac{\cos ax}{a^2}$

5. $\dfrac{-x^2}{b}\cos bx+\dfrac{2x}{b^2}\sin bx+\dfrac{2}{b^3}\cos bx$

6. $\sin(x+\alpha)(x^3-6x)+\cos(x+\alpha)(3x^3-6)$

9. $e[1-n+n(n-1)-n(n-1)(n-2)$
$+\ldots\ldots$ to n terms $]$

பயிற்சிகள் 25

1. $(x^4-12x^2+24)\cos x+(4x^3-24x)\sin x$

2. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}$ 3. $\dfrac{11}{4}\sqrt{3}+\dfrac{3}{8}\log(2+\sqrt{3})$

4. $\dfrac{3\pi^2}{16}$ 5. $\dfrac{7}{8}\sqrt{2}+\dfrac{3}{8}\log(\sqrt{2}+1)$

6. $\dfrac{\pi}{32}$ 7. $\dfrac{2}{15}$ 8. $\log 2-\dfrac{1}{4}$

9. $(1+m^2)I_m=m(m-1)I_{m-2}$; $\frac{24}{85}$

10. (a) $\dfrac{e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x+n\sin x)}{a^2+n^2}+\dfrac{n(n-1)}{a^2+n^2}I_{n-2}$

(b) $\frac{2}{3}$

11. $\phi(n)=\dfrac{n-1}{n}\phi(n-2)+\dfrac{1}{n^2}$; $\dfrac{154}{225}$

12. $\frac{3}{4}\pi^2-6$

17. (a) $x^5[\frac{1}{5}(\log x)^3-\frac{3}{25}(\log x)^2+\frac{6}{125}(\log x)-\frac{6}{625}]$

(b) $\dfrac{7\pi}{2048}$ (c) $\dfrac{1}{17}$

(d) $\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6}$ (e) $\frac{3\pi}{16\ 95}$

(f) $\frac{5\pi}{32}$ (g) $\frac{7}{9}$

பயிற்சிகள் 27

10. $\frac{\pi}{2}$ 11. $\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}$ 12. $\frac{4}{e}$

13. $1 + \frac{\pi}{2}$ 14. $\frac{\pi}{2}$ 15. log 2.

பயிற்சிகள் 28

1. $20\frac{1}{4}$ 2. $8\frac{1}{6}$ 3. 12 4. 192

5. $20\frac{5}{6}$ 6. $166\frac{2}{3}$ 7. 2 8. $\frac{2}{3}\sqrt{3}\,a^2$

9. 12 10. $\frac{3}{4}$ 11. $10\frac{2}{3}$ 12. $\frac{1}{3}$

13. $\frac{4}{15}$ 14. $85\frac{1}{6}$ 15. $\frac{9}{8}$ 16. $\frac{1}{6}a^2$

17. 1 18. $\frac{8}{15}a^2$ 19. $\frac{4}{3}$ 20. $\frac{1}{3}$.

பயிற்சிகள் 29

1. $312\frac{3}{7}\pi$ 5. 60π 9. $\frac{9}{8}\pi a^3$, $\frac{5}{24}\pi a^3$

2. $678\frac{1}{56}\pi$ 6. $3333\frac{1}{3}\pi$ 10. $\frac{32}{105}\pi a^3$

3. 54π 7. $\frac{512}{3}\pi$ 11. 490 க. அ.

4. $\frac{54}{5}\pi$ 8. $\frac{288}{5}\pi$

பயிற்சிகள் 30

1. $\frac{2}{3}$ 2. 1.

3. $ab\left[\cos^{-1}\frac{c}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2}\right]$ 4. $\frac{2a^2}{5}$

5. $\frac{3\pi a^2}{32}$ 6. $\frac{1}{6}$ 7. $\frac{9}{2}$

8. $c^2 \sin h!$ 9. (i) $2 - \frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{256\sqrt{2}}{105}$

(iii) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ (iv) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$ (v) $\frac{256\, a^2}{15}$

10. $4\pi a^2$ 11. $3\pi a^2$ 12. $\frac{8}{3} a^2$

பயிற்சிகள் 31

1. (i) $\sqrt{2} - 1$ (ii) $\frac{5}{4}\, 9^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\frac{16}{3}$

(iv) $\frac{8}{3}$ 3. $25 \sin^{-1} \frac{4}{5} + 4$ 4. $(4\pi - \frac{23}{3})\, a^2$

6. $\log 4 - \frac{3}{4}$ 7. 2π 8. $\frac{\pi}{2}$.

பயிற்சிகள் 32

1. πa^2 2. 24π 3. $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$

4. $\frac{\pi a^2}{8}$ 5. $\frac{a^2}{2}$ 8. $\left(\frac{3\pi}{4} \pm 2\right) \cdot a^2$

பயிற்சிகள் 33

2. $\frac{\pi}{4}$ 3. 0 4. $\frac{\pi^2}{4}$

5. $\frac{\pi}{8} \log 2$ 6. $\pi \log (\frac{1}{2})$ 7. π

8. $\frac{1}{\sqrt{2}} \log (\sqrt{2} + 1)$ 9. $\frac{-\pi}{2} \log 2$ 10. $\frac{128\sqrt{2}}{105}$

13. $\frac{1}{(m+1)(m+2)}$ 15. $n!$ 16. $\frac{\pi^3}{96}$

17. $\frac{3\pi}{8}$

பயிற்சிகள் 34

1. 1·13, 1·19. 2. 1·57, 1·68.

3. 1·785, 2.

பயிற்சிகள் 35—A

1. $\frac{32\pi a^3}{105}$ 3. $\pi a^3 (4 \log 4 - 3)$ 4. $\frac{2}{15}\pi$

5. $\frac{32}{5}$ 6. $4\pi \frac{a^3}{7}$ 7. $2\pi a^3 (\log 2 - \frac{2}{3})$

8. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ 9. $\frac{32}{15}\pi$; $\frac{\pi a^3}{12}$ 10. 90π.

பயிற்சிகள் 35—B

1. $\frac{32\sqrt{5}}{5}\pi$ 2. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ 3. $\frac{128}{15}\pi a^3$, $\frac{2\pi a^3}{5}$

4. $\frac{\pi^2}{2}$ 7. $\frac{40\pi}{3}$ 8. $\frac{1}{3}(2 - \sqrt{3})\pi r^3$

9. $\frac{\pi a^3}{6}$ 10. $2 \cdot 813\, \pi c^3$ 11. $2\pi^2 r^3$

12. 1 : 4

பயிற்சிகள் 36

1. $\frac{61}{54}$ 2. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$ 3. $8a$

4. $\frac{(\pi + y)a}{2\sqrt{2}}$ 5. $\frac{a}{4}(3 + \log 4)$ 6. $\log(2 + \sqrt{3})$

7. 1 8. $c(\sin h\, 1)$ 9. $\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{4 + \sqrt{17}}{2 + \sqrt{5}}$

10. $a\left[\sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1)\right]$ 11. $\frac{3}{2}\pi a$

12. $\frac{1}{4}\left[2 + \sqrt{2}\sin^{-1} h_1\right]$

பயிற்சிகள் 37

1. $\frac{32\pi a^2}{5}$ 2. $\frac{64}{3}\pi a^2$

3. $\frac{208}{9}\pi$ 4. $\frac{r}{2}$

5. $2\pi a^2(1-e^{-1})$ 6. $4\pi\left[\frac{8}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right]$

7. $\frac{12\pi a^2}{5}$ 10. $\frac{8\pi a^3}{3}(2\sqrt{2}-1)$

11. $8\pi a^2\left((1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 12. $\frac{\pi a^2}{27}\ 10\sqrt{10}$

13. 3π 14. $\frac{\pi}{3}a^2$

15. $\frac{2\sqrt{2}}{5}(e^{2\pi}+1)$

பயிற்சிகள் 38

1. (i) $\bar{y}=\frac{4a}{3}$ (ii) $\bar{x}=\bar{y}=\frac{2a}{5}$

(iii) $\bar{x}=\frac{4a}{5}$; $\bar{y}=0$ (iv) $\frac{1423}{2745}$

2. (i) $\left(\frac{5a}{6}, 0\right)$ (ii) $\bar{x}=\frac{128a\sqrt{2}}{105\pi}$

(iii) $\bar{x}=\frac{81a\sqrt{3}}{80\pi}$

3. (1) $\bar{x}=\frac{3h}{5}$ (2) $\bar{x}=\bar{y}=\frac{256a}{315\pi}$

(3) $\bar{x}=\frac{2a}{3(\pi-2)}$, $\bar{y}=\frac{2b}{3(\pi-2)}$

(4) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{9}{5}$ (5) $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$; $\bar{y} = \frac{\pi}{8}$

(6) $\bar{y} = \frac{1}{4}\left[a \operatorname{cosec} h \frac{b}{c} + c \cos h \frac{b}{c}\right]$

(7) $\left(\frac{3a}{5}, \frac{3a}{4}\right)$ (8) $\frac{b-c}{\log\left(\frac{b}{c}\right)}$; $\frac{a^2 (b-c)}{2bc \log\left(\frac{b}{c}\right)}$

(9) $\left(\pi a, \left(\frac{5}{6} a\right)\right)$ (10) $\left(2, \frac{8}{5}\right)$

(11) $\left(\frac{17}{5}, -2\right)$ (12) $\left(\frac{5}{4}, \frac{16}{3}\right)$

4. $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$; $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$

5. கோணத்தை இரு கூருக்கும் கோட்டில்

$\frac{4 r \sin^3 \alpha}{3 (2\alpha - \sin 2\alpha)}$ தூரத்தில்.

6. $\frac{3a\pi}{16}$ தூரத்தில் நடு ஆரையில். 7. $\frac{2k}{3} \pi a^3$

8. $\bar{x} = \frac{3}{4} \frac{(b + c)(2a^2 - b^2 - c^2)}{3a^2 - (b^2 + bc + c^2)}$

9. நடு ஆரையில் மையத்திலிருந்து $\frac{5a}{8}$ தூரத்தில்

10. (1) $\bar{x} = \frac{3a}{8}$ (2) $\bar{x} = \frac{4 + \pi^2}{4\pi}$

(3) $\bar{y} = 2a \log 2$

11. $\frac{3}{4} h$ 12. $\left(\frac{3a}{5}, 0\right)$

13. முனையிலிருந்து $\frac{a}{20 - 6\pi}$ தூரத்தில்

14. $\left(a, \frac{5a}{8}\right)$

15. $\bar{x} = \frac{3(2a - h)^2}{4(3a - h)}$

16. $\left(\frac{4a}{5}, 0\right)$

17. $\bar{x} = \frac{5}{4}$

18. $\bar{x} = \frac{58}{35}$

19. முனையிலிருந்து $\frac{a}{\pi - 2}$ தூரத்தில்

20. $\frac{h(3a^2 + 2ab + b^2)}{4(a^2 + ab + b^2)}$

பயிற்சிகள் 39

1. $\pi \sqrt{3}\, a_2,\ \frac{\pi}{4} a^2$

3. $2\pi^2 r^3,\ 4\pi^2 r^2$

4. $2\pi^2 a^3 \frac{b}{c}$.

பயிற்சிகள் 40

1. $M \frac{a^2}{2}$

2. $a \sqrt{\frac{3}{5}}$

3. $M \frac{a^2 + b^2}{4}$

4. (i) $M \frac{a^2}{12}$

(ii) $M \frac{a^2}{2}$

(iii) $M a^2 \left(\frac{1}{4} + e^2\right)$

(iv) $M a^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{e^2}\right)$

(v) $M \frac{a^2 + b^2}{4}$; $M \frac{(a^2 + b^2)}{2}$

5. $\frac{Mp^2}{6}, \frac{Mp^2}{2}$

6. $M \frac{a^2}{12}$

7. $\frac{256}{15} a^2$

8. $7 M a^2$

9. $\frac{35}{36} Ma^2$

10. $\frac{2}{3} Ma^2$

11. $\frac{2}{3} Ma^2$ 12. $M\frac{b^2+c^2}{3}$, $M\frac{c^2+a^2}{3}$, $M\frac{a^2+b^2}{3}$

13. (i) $\frac{Mr^2}{2}$ (ii) $\frac{3}{2} Mr^2$ (iii) $M\left(\frac{h^2}{3}+\frac{r^2}{4}\right)$

14. $\frac{M2a^2}{5}$ 15. $\frac{2Mb^2}{5}$

16. $\frac{63}{40} Ma^2$ 17. $\frac{Mr^2}{2}$

19. $\frac{67\pi}{640}(e^{4\pi}-1)$

பயிற்சிகள் 42

1. $\frac{3}{4} h$ 2. $\frac{1}{2} \frac{(6\ ^2+8kh+3h^2)}{(3k+2h)}$

[முக்கோணத்தின் உயரம்]

3. $4\frac{1}{3}$ அடி 4. $\frac{3}{16} \pi r$

5. $\frac{5}{4} a$ 6. $\frac{h(a+3b)}{2(a+2b)}$

[நீர்மட்டத்தில் 'a'-என்ற பக்கம், 'b'-இணைப்பக்கம், h-உயரம்]

7. $\frac{4}{7} a$ 8. $\frac{7}{6} a$

பயிற்சிகள் 43

1. $6\frac{29}{36}$ அடி/ப 2. $\frac{5}{8}$ அடி/ப

3. $\frac{7}{8}$ அடி/ப 4. 723,000 அடி/ப

பயிற்சிகள் 44

1. (a) ரூ. 500 $[(1{\cdot}005)^{120}-1]$ (b) $500(e^{\frac{3}{5}}-1)$

4. $0{\cdot}00064\ \pi$ க.செ.மீ. 5. $5{\cdot}372$ அடி.

பயிற்சிகள் 45

1. 2
2. 4
3. $3 \cdot 4^{\frac{1}{3}}$
4. மதிப்பில்லை
5. $\frac{3}{2} 2^{\frac{3}{2}}$
6. மதிப்பில்லை
7. 0
8. 9
9. -2
10. $\frac{1}{2}$

பயிற்சிகள் 45—A

1. ஒருங்கும்
2. $a > 0$ எனில் ஒருங்கும்
3. ஒருங்கும்
4. ஒருங்காது
5. ஒருங்கும்
6. ஒருங்கும்
7. ஒருங்கும்
8. ஒருங்கும்
9. ஒருங்கும்
10. ஒருங்காது
11. $n - m > \frac{1}{2}$ எனில் ஒருங்கும்
12. $a > 0$ எனில் ஒருங்கும்

பயிற்சிகள் 46

9. $B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

10. $BC\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$

பயிற்சிகள் 49

2. $\frac{8\pi^3}{\sqrt{7}}$

6. 0

7. $$\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)\Gamma(n+1)}{q\Gamma\left(\frac{n+1}{q}, n+1\right)}$$

பயிற்சிகள் 50

1. 24
2. $\frac{ab}{3}(a^2 + b^2)$
3. $\frac{8a^5}{75}$
4. 2

5. $\dfrac{(1-a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$ 6. $\dfrac{\pi}{4}\log 2$

7. $\log\dfrac{a}{2}\cdot\log\dfrac{b}{2}$ 8. $\dfrac{2a^3}{3}$

9. a. 10. $\frac{32}{9}$

11. $e-2$ 12. $\frac{8}{3}$

13. $\dfrac{a^4}{15}$ 14. $\dfrac{\pi}{4a^2}$

பயிற்சிகள் 51

1. (i) $\frac{1}{2}ab$ (ii) πa^2

2. (i) $\dfrac{a^2b^2}{24}$ (ii) $\dfrac{a^4}{8}$

(iii) $\dfrac{a^2b^2}{4}$

3. (i) $\dfrac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$

(ii) $\dfrac{1}{6}$

பயிற்சிகள் 52

1. 4 2. $4\frac{1}{2}$ 3. $\dfrac{9\pi}{2}-4$

4. $8-\pi\sqrt{2}$ 5. $2+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

6. $\dfrac{20}{3}-4\log 2$ 7. $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8. $\dfrac{5\pi a^2}{32}$ 9. $\dfrac{a^2}{2}(4-\pi)$; $\dfrac{a^2}{4}(4+\pi)$

பயிற்சிகள் 53

1. 1, 2 2. $\frac{24}{25}$, $\frac{12}{7}$ 3. $-\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{5}$ 4. 4, $\frac{22}{3}$

5. $\dfrac{2}{3\pi-8}$ 6. $\bar{x}=\dfrac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}$

7. $\frac{7\pi}{8(\pi - 1)}$ 8. $\frac{3e^2 - 1}{3(e^2 - 2)}, \frac{3e^4 - 7}{12(e^2 - 2)}$

9. $\frac{16}{5}$ 10. $\frac{64}{5}$ 11. $\frac{63}{20}$ 12. $\frac{721}{2}$

13. $\frac{1744}{105}$.

பயிற்சிகள் 54

1. a^2 2. $\frac{\pi a^2}{2}$ 3. $\frac{a^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3})$

4. $\frac{a^2}{16}[21\sqrt{3} + 10\pi - 48]$ 5. $\pi + 4$

6. $\frac{22 + 9\pi - 6\log 2}{12}$ 7. 8π 8. $\frac{a^2}{4}(4 - \pi)$.

பயிற்சிகள் 55

1. $\frac{32}{9}ka^3$ 2. $\frac{4}{3}ka^3$ 3. $\bar{x} = \frac{11a}{14}$; $\bar{y} = 0$

4. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{128}{105\pi}$ 5. $\frac{\pi a^4}{8}$ 6. $\frac{5Ma^2}{9}$

பயிற்சிகள் 56

1. 4 2. $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$ 3. $8\frac{1}{6}$

4. 4 5. 2π 6. $\frac{27}{2}\pi$

7. $\frac{2}{7}$ 8. $\pi - 1$.

பயிற்சிகள் 57

1. $\frac{4}{9}a^3$ 2. $\frac{16\sqrt{2}a^3}{9}$ 3. $\frac{8}{9}a^3$

4. $\frac{\pi a^3}{16}$ 5. $\left(\frac{10 - 3\pi}{12}\right)a^3$ 6. $\left(\frac{32 - 9\pi}{48}\right)a^3$

பயிற்சிகள் 58

1. $\frac{\pi}{2}a^2$ 2. $4a^2$ 3. $8a^2$

4. $\pi\sqrt{2}$ 5. $\sqrt{\frac{5}{8}}\,\pi a^2$

பயிற்சிகள் 59

1. $32(2\sqrt{2}-1)\pi$ 2. $4(2-\sqrt{2})a^2$

3. $\frac{a^2}{4}(\sqrt{2}+1)$

பயிற்சிகள் 60

1. 1 2. $\left[\frac{k^3\pi}{3}\right]$ 3. $\frac{\pi a^5}{10}$

4. $\left[\frac{a^4}{8}-3\frac{a^2}{4}+a-\frac{3}{8}\right]$, 5. 9 6. π

7. $\frac{1}{2}$ 8. $4(\pi-2)$ 9. $\frac{6\pi-1}{2}$ 10. $\frac{4}{7}a^4$

பயிற்சிகள் 61

1. 16π 2. $\frac{3}{2}\pi a^5$ 3. 16π

3. $\frac{abc}{6}$ 5. π 6. $4\pi a$

7. 27π 8. $\frac{8}{3}$ 9. $2\log 2$

10. 4 11. $\frac{4}{3}a^2b$ 12. $\frac{50}{3}\pi$

பயிற்சிகள் 62

1. $\frac{8}{4}$, 1, 3 2. $\frac{24}{5}$

3. $I_{xy}=\frac{128\rho}{3}$, $I_{xz}=I_{yz}=16\rho$

$I_x=I_y=\frac{176}{3}\rho$, $I_z=32\rho$

4. $(0, 0, \frac{8}{4})$

5. (a) $\frac{39{,}366}{35}k\pi$, (b) $\frac{56{,}376\,k\pi}{35}$

(c) $\frac{19{,}683}{35}k\pi$

6. $\frac{3}{2}$ 7. (a) $\frac{16}{105}k\pi a^7$,

(b) $\frac{8}{105}k\pi a^7$ (c) $\frac{28}{105}k\pi a^7$

B. Sc. Maths.—Integral Calculus

BIBLIOGRAPHY

1. Integral Calculus by Sri *T. Govindarajan*, M.A., L.T.

2. Calculus by Sri. *T. K. Manickvasagam Pillai*, M.A., L.T.

3. Calculus by Sri *M. I. Francis Raj*, M.A.

4. Calculus for Engineering Students
   by Sri *M. K. Venkataraman*, M.A.

5. Integral Calculus by Sri *Santhinarayanan*, M.A.

6. Integral Calculus by Sri *Khanna*

7. Integral Calculus by *Joseph Edwards*

8. Integral Calculus by *Caunt, G. W. C.*

9. Integral Calculus by *B. Williamson*

10. Integral Calculus *W. L. Ferrar*

11. Advanced Calculus by MURRARY *R. S. Perquel*

12. Advanced Calculus by *G. A. Gibson*

கலைச் சொற்கள்

A

Abscissa	—	கிடைதூரம், அச்சு தூரம்
Acceleration	—	வேகவளர்ச்சித்தகவு
Action and reaction	—	விசை, எதிர்விசை
Ad infinitum	—	முடிவின்றி
Adjacent	—	அடுத்துள்ள
Aggregate	—	மொத்தம்
Algebra	—	இயற்கணிதம்
Alternate	—	ஒன்று விட்ட
Altitude	—	குத்துக்கோடு
Ambiguity	—	ஈரடி
Amount	—	தொகை
Analysis	—	பகுப்பாய்வு
Analytical Method	—	பகுமுறை
Anchor ring	—	நங்கூரவளையம்
Angle, right	—	செங்கோணம்
Approximate	—	தோராயமான
Arbitrary	—	யாதா மொரு
Arc	—	வில்
Arithmetic	—	எண்கணிதம்
Ascending order	—	ஏறு வரிசை
Asymptote	—	தொலை தொடுகோடு
Auxiliary	—	துணை
Average	—	சராசரி
Axis	—	அச்சு, ஆயம்
Axes of co-ordinates	—	ஆயங்கள்
Axis major	—	நெட்டச்சு
Axis, minor	—	குற்றச்சு

B

Binomial	—	ஈருறுப்பு
,, Coefficient	—	ஈருறுப்புக் குணகம்
,, expression	—	,, கோவை
,, theorem	—	,, தேற்றம்
Biquadratic	—	நாற்படி
Bisector	—	இருசம வெட்டி
Bound	—	எல்லை
Boundary conditions	—	எல்லை நிபந்தனைகள்
Bounded above	—	மேல் எல்லையுள்ள
,, below	—	கீழ் எல்லையுள்ள
Bounding radius	—	எல்லை யாரை
,, surface	—	எல்லை மேற்பரப்பு
Boundless	—	எல்லை யற்ற
Brackets	—	அடைப்புகள்
Breadth	—	அகலம்

C

Calculate	—	கணக்கிடு
Calculus	—	நுண் கணிதம்
,, differential	—	வகை ,,
,, integral	—	தொகை ,,
Cancel	—	நீக்கு
Capacity	—	கொள்ளளவு
Cardioted	—	நெஞ்சுவளை
Case	—	வகை
,, ambiguous	—	ஈரடி வகை
,, general	—	பொது வகை
,, particular	—	குறிப்பிட்டவகை
,, special	—	சிறப்புவகை
Cartesian Co-ordinates	—	தெக்காட்டின் ஆய அளவுகள்
Catenary	—	கயிற்று வளை
Centre	—	மையம்
,, of Curvature	—	வளைவு மையம்
,, of gravity	—	புவிஈர்ப்பு ,,
,, of mass	—	பொருண்மை மையம்
,, of pressure	—	அழுத்த ,,
Centroid	—	பொருண்மைமையம், திணிவு மையம்

Cipher — பூச்சியம்
Circle — வட்டம்
Clockwise — வலஞ்சுழியாக
Circular function — வட்டச் சார்பு
Change of axis — அச்சு மாற்றம்
,, of variable — மாறி ,,
Coefficient — குணகம்
Coincide — பொருந்து
Collinear — ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ள
Column — நிரல்
Combination — சேர்மானம், சேர்வு
Compare — ஒப்பிடு
Comparison test — ஒப்பீட்டுச் சோதனை
Complementary — நிரப்பும்
Compound expression கலப்பினக் கோவை
Complex number — சிக்கலெண்
Concave — குழிவான
Concentric பொது மையமுள்ள
Conclusion — முடிவு
Condition — நிபந்தனை
Cone — கூம்பு
,, frustrum of a கூம்பின் அடிவெட்டு
,, hollow — உள்ளீடற்ற கூம்பு
,, right circular நேர்வட்டக் கூம்பு
,, surface of — கூம்பின் மேற்பரப்பு
Congruence — சர்வசமம்
Conic — கூம்புவளைவு
Conjucate — இணை
Consecutive — அடுத்தடுத்து
Constant — மாறிலி, மாறு
,, of integration — தொகை ஈட்டு மாறிலி
Construct — வரை
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous curve தொடர் வரை
,, function — தொடர்புள சார்பு
Contradictary — எதிர் மறையான
Convention — வழக்கு, மரபு
Converge — ஒருங்கு, குவி
Convergence — ஒருங்கல்,
,, absolute — அற வொருங்கல்

Convergence Conditional	—	நிபந்தனையொடொருங்கல்
,, uniform	—	சீரான வொருங்கல்
,, of an integral	—	தொகையீட்டொருங்கல்
Converse	—	மறுதலை
Conversion	—	மாற்றம்
Convex	—	குவிந்த
Co-ordinate geometry	—	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்
Co-ordinates	—	அச்சுதூரங்கள், ஆயத்தொலைகள்
,, Cartesian	—	தெக்காட்டின் கூறுகள்
,, oylindrical	—	வட்டக் கூறுகள்
,, polar	—	முனை ஆயதூரங்கள், கோணதூரக் கூறுகள்
,, spherical	—	கோளக் கூறுகள், கோள ஆயதூரங்கள்
Coplanar	—	ஒரே தளமான
Copy	—	நகல், பிரதி
Corollary	—	கிளைத் தேற்றம்
Cosine	—	கொசைன், இடக்கை
,, direction	—	திசைக் கொசைன்
,, ratio	—	திசை விகிதம்
Counter-clockwise	—	இடஞ்சுழியாக
Cube	—	கன சதுரம்
Cuboid	—	கனச் செவ்வகம்
Current coordinate	—	நடப்புக் கூறுகள்
Curvature	—	வளைவு
,, centre of	—	வளைவு மையம்
,, circle of	—	வளைவு வட்டம்
,, radius of	—	வளைவரை
Curve	—	வளைவரை, வளைகோடு
Curved surface	—	வளைபரப்பு
Cycloid	—	உருள்வளை
Cylinder	—	உருளை
,, right circular	—	நேர்வட்ட உருளை

D

Data	—	விவரங்கள்
Decimal	—	தசமம்
Decreasing function	—	குறையுஞ் சார்பு

Deductive proof	—	உய்த்தறி நிறுவல்
Define	—	வரையறு
Definition	—	வரையறை
Definite	—	வரையறுத்த
Degree, of an equation	—	சமன்பாட்டுப்படி
Density	—	அடர்த்தி
Dependent	—	சார்ந்த
Derivative	—	வகைக் கெழு
Descending order	—	இறங்கு வரிசை
Describe	—	விவரி
Determinant	—	அணிக்கோவை
Develop	—	விரி
Diagonal	—	மூலைவிட்டம்
Diagram	—	விளக்கப் படம்
Differentiable	—	வகையிடத்தக்க
Differential	—	நுண்ணெண்
,, calculus	—	வகை நுண்கணிதம்
,, co-efficient	—	வகைக் கெழு
Differential equation	—	வகைக்கெழு சமன்பாடு
,, partial	—	பகுதி ,,
Differentiate	—	வகையீடுகாண்
Differentiate with respect to x	—	x ஐ ஒட்டி ,,
,, to y	—	y ஐ ஒட்டி ,,
Defferentiation	—	வகையிடல்
,, logarithmic	—	மடக்கை வகையீடு
,, partial	—	பகுதிவகையீடு
,, successive	—	அடுத்தடுத்து வகையீடு காணல்
Differential of an integral	—	ஒரு தொகையீட்டை வகையிடல்
Digit	—	இலக்கம்
Dimension	—	பரிமாணம், அளவு
Directed	—	திசை கொண்ட
Directrix	—	இயக்குவரை
Disc	—	வட்டத் தகடு
Discontinuity	—	தொடர்ச்சியின்மை
Discriminant	—	தன்மை காட்டி
Displacement	—	இடப் பெயர்ச்சி
Diverge	—	விரி

Divergence — விரிதல்
Divergent — விரியும்
Domain — அரங்கம்
Double Integral — இரு மாறித் தொகை
Dynamics — இயக்கவியல்

E

Eccentric angle — துணை வட்டக் கோணம்
Edge — விழும்பு
Effort — திறன்
Elastic — மீள் சக்தியுள்ள
Element — உறுப்பு மூலம்
Elementary — தொடக்கத்துக் குரிய
Eliminate — நீக்கு, விலக்கு
Eleminant — நீக்கற் பலன்
Ellipse — நீள் வட்டம்
Ellipsoid — நீள் வட்டக் கோணம்
Empirical — அனுபவ
Energy — ஆற்றல்
Enunciation — விவரணம்
Equation — சமன்பாடு
Equate — சமன்படுத்து
Equivalent — சமம்
Error — பிழை, வழு
Exact — திருத்தமான
Explanation — விளக்கம்
Explicit — வெளிப்படையான
Exponent — அடுக்குக்குள்
Exponential function — அடுக்குக் குறிச்சார்பு
Expression — கோவை
,, algebraic — இயற்கணிதக் ,,
,, binomial — ஈருறுப்புக் ,,
,, homogeneous — ஒரு படித்தான ,,
,, irrational — விகிதமுருக் ,,
,, linear — ஒரு படிக் ,,
,, rational — விகிதமுறு ,,
Extremities — முனைப் புள்ளிகள்

F

Function — சார்பு
,, algebraic — இயற்கணித சார்பு
,, bounded — எல்லையுள்ள ,,
,, circular — வட்டச் ,,
,, continuous — தொடர்புடைச் ,,
,, discontinuous — தொடர்பிலாச் ,,
,, derived — வழிச் ,,
,, explicit — வெளிப்படைச் ,,
,, exponential — அடுக்குக்கறிச் ,,
,, homogeneous — சமபடிச் ,,
,, hyperbolic — அதிபரவளை ,,
,, implicit — உட்படு ,,
,, integral — முழு எண் ,,
,, inverse — நேர்மாறு ,,
,, linear — ஒருபடிச் ,,
,, logarithmic — மடக்கைச் ,,
,, odd — ஒற்றைச் ,,
,, periodic — மீள் ,,
,, polynomial — பல்லுருப்புச் ,,
,, rational — விகிதமுறு ,,
,, transcendental — கடந்த ,,
,, trigonmetric — திரிகோண ,,
Fundamental — அடிப்படையான

G

Gamma function — காமாச்சார்பு
Generalisation — பொது விதி
Generating line — பிறப்பிக்குங்கோடு
Generator — பிறப்பாக்கி
Geometry — வடிவகணிதம்
,, Analytical — பகு முறை ,,
,, co - ordinate — ஆயத்தொலை ,,
Gradient — சரிவு, சாய்வுவீதம்
Graph — வரைபடம்
Gravitation — ஈர்ப்பு
,, force of — ஈர்ப்பு விசை
Gravity — புவி ஈர்ப்பு

Gravity acceleration due to	—	புவி ஈர்ப்புவேகவளர்ச்சி விதம்
,, centre of	—	புவிஈர்ப்புமையம்
Gyration	—	சுழிப்பு
,, radius of	—	சுழியாரை

H

Half	—	அரை
Harmonic progression	—	இசைத் தொடர்
Heterogeneous	—	பலவிதமான, பல படித்தான
Hollow	—	உள்ளீடற்ற
Homogeneous	—	ஒருபடித்தான
Hoop	—	வளைவு
Horizontal	—	கிடை
,, line	—	கிடைகோடு
,, plane	—	கிடைத்தளம்
Hyperbola	—	அதிபரவளைவு
Hyperbolic function	—	அதிபரவளை சார்பு
Hyperboloid	—	கன அதிபரவளைவு
Hypotenuse	—	கர்ணச் செம்பக்கம்
Hypothesis	—	எடுகோள், கோண்கொண்டார்

I

Identity	—	சர்வசமம்
Identical	—	சர்வசமமுள்ள
Illustration	—	எடுத்துக் காட்டு
Image	—	விம்பம்
Imaginary	—	கற்பனையின் மெய்யிலா
,, lines	—	கற்பனைக் கோடுகள்
,, number	—	கற்பனை எண்
,, root	—	கற்பனைமூலம்
Inclination	—	சாய்வு
Inclined plane	—	சாய்தளம்
Inconsistent	—	முரணான
Increasing function	—	ஏறும்சார்பு
Increment	—	ஏற்றம்
Indifinite integral	—	வரையறுத்தொகை
Independent variable	—	சாராமாறி
Indeterminate	—	தேரா
Index	—	குறி

Indexnegative	—	குறைக்குறி
,, positive	—	மிகைக்குறி
Inductive method	—	தொகுத்தறிவுமுறை
Inelastic	—	மீள் சக்தியற்ற
Inequality	—	சமமின்மை, சமமிலி
Inert	—	சடமான
Inertia	—	சடத்துவம்
,, moment of	—	நிலைநெம்புத் திறன்
,, product of	—	சடத்துவப் பெருக்கம்
Inference	—	அனுமானம், முடிவு
Infinite	—	முடிவில்லாத
,, integral	—	குவியும் தொகையீடு
,, sequence	—	முடிவிலா (எண்) தொடர்ச்சி
,, Series	—	முடிவிலாத் தொடர்
Infinitesimal	—	நுண்ணிய
Infinity	—	முடிவிலி
Initial	—	தொடக்க
,, line	—	தொடக்கக் கோடு
Instant	—	கணம்
Integer	—	முழு எண்
Integral	—	தொகை, தொகையீடு
,, definite	—	வகையறுத்த தொகை
,, double	—	இருமாறித் தொகை
,, indefinite	—	வரையறுத் தொகை
,, multiple	—	பன்மாறித் ,,
,, trible	—	மும்மாறித் ,,
,, calculus	—	தொகை நுண்கணிதம்
Integrand	—	தொகைச் சார்பு
Integrate	—	தொகைகாண்
Integration factor	—	தொகையீட்டுக் காரணி
Integration	—	தொகையிடல்
,, by parts	—	பகுதிப் படுத்தித் தொகை காணல்
,, by partial fraction	—	பகுதிப் பின்னமுறையில் பகுத்துத் தொகைகாணல்
,, by substitution	—	பிரதியிட்டுத் தொகை காணல்
Intercept	—	வெட்டுத் துண்டு
Interval	—	இடை வெளி
Invariable	—	மாறுத
inverse	—	நேர்மாறுன

Irrational	—	விகித முரு
,, roots	—	விகித முருமூலங்கள்
Item	—	இனம், உறுப்பு

J

Jacobian determinant	—	சார்புத்துணைக் கோவை
Join	—	இணை

K

Kilogram	—	கிலோகிராம்
Known quantity	—	தெரிந்த கணியம்

L

Lamina	—	தட்டு, தகடு
Lateral surface	—	பக்கப் பரப்பு
Latus rectum	—	செவ்வகலம்
Law	—	விதி
Level	—	சமமட்டமான
Limit	—	எல்லை, வரம்பு
,, lower	—	கீழ் எல்லை
,, upper	—	மேல் எல்லை
Limited	—	எல்லைக்குப் பட்ட
Limiting value	—	எல்லை மதிப்பு
Line	—	கோடு
,, curved	—	வளைகோடு
,, horizontal	—	கிடை ,,
,, straight	—	நேர் ,,
,, vertical	—	நிலைக் ,,
Lincar	—	ஒருபடிக் குறிய
,, equation	—	ஒருபடிச் சார்பு
,, factor	—	ஒருபடிக் காரணி
,, momentum	—	நேர் கோட்டுத் திணிவு வேகம்
Locus	—	நியமப் பாதை
Logarithm	—	மடக்கை
Loop	—	தடம்
Lower bound	—	கீழ் வரம்பு
Lune	—	இருவில் வளைவுகளுக்கு இடைபட்ட வடிவம், பிறை வடிவம்.

M

Machine	—	பொறி, இயந்திரம்
Major	—	பெரிய
Magnitude	—	பருமன், அளவு
Mark	—	குறி, புள்ளி
Mass	—	பொருண்மை
,, centre of	—	பொருண்மை மையம்
Matter	—	சடப் பொருள்
Maximum	—	மீப் பெரு, உச்ச
Mean	—	சராசரி, இடை
Measure	—	அளவு
Mechanics	—	இயந்திர வியல்
Median	—	மையக்கோடு
Method	—	வழி, செய்முறை
, Analytical	—	பகுப்பு வழி
,, Synthetic	—	தொகுப்பு வழி
Minor	—	சிறிய
Minus	—	குறை, கழி
Minute	—	நிமிடம்
Modulus	—	எண்ணளவு மட்டு,
Moment	—	சுழல் திறன், திருப்புத் திறன்
,, of a force	—	விசையின்-திருப்புத் திறன்
,, of inertia	—	நிலை நெம்புத் திறன்
Momentum	—	உந்தம்
Monotonic function	—	ஓரியல்புச் சார்பு
,, increasing function	—	ஒரே முறை ஏறும் சார்பு
,, decreasing function	—	ஒரே முறை இறங்கும்
Motion	—	இயக்கம்
,, of rotation	—	சுழற்சி இயக்கம்
Movement	—	அசைவு
Multiple	—	மடங்கு
,, integral	—	மடங்குத் தொகையீடு,
	—	பன்மாறித் ,,
,, roots	—	மீண்டு வரும் மூலங்கள், தீர்வு கள்
Multiplication	—	பெருக்கல்
Multiply	—	பெருக்கு
Multivariable	—	பன்மாறி

N

Necessary and sufficient condition	—	வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகள்
Negative	—	குறை, எதிர்
Negligible	—	புறக்கணிக்கத்தக்க
Neutral	—	நடு நிலையான
Nomenclature	—	பெயரீடு
Normal	—	செங்குத்து
,, acceleration	—	நேர்குத்து எதிர்விசை
,, to a curve	—	வரைச் செங்கோடு
Numerical coefficient	—	எண் குணகம்
,, differentiation		எண்சார் வகைக் கெழுகாணல்
,, integration	—	எண்சார் தொகை காணல்
,, value	—	பெறுமானம்
Numerically	—	எண்ணளவில்

O

Object	—	பொருள்
Oblique	—	சாய்வான, சரிவான
Observation	—	கண்டறிதல்
Octant	—	எண் பகுதி
Odd	—	ஒற்றை
One to one correspondence	—	ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபு
Open interval	—	திறந்த இடைவெளி
Operation	—	செய்கை
Operator	—	செயலி
Opposition	—	எதிரான
Order	—	வரிசை, ஒழுங்கு
Ordinary	—	பொதுவான
Ordinate	—	நிலை தூரம், நிலைக்கோடு
Origin	—	ஆதி
Orthogonal	—	செங்குத்தான
Oscillate	—	அலைதல்
Oscillatory series	—	அலைத்தொடர்
Oval	—	முட்டையுரு

P

Pair	—	சோடி
Parabola	—	பரவளைவு
Paraboloid	—	கனபரவளைவு
Paradox	—	முரண்படு மெய்மை
Parallel	—	இணை, ஒருபோகு
,, axis theorem	—	இணை அச்சுத் தேற்றம்
,, forces	—	இணை விசைகள்
Parallelogram	—	இணைகரம்
Parallelopiped	—	இணைகரத்திண்மம்
Parameter	—	சாராமாறி
Part	—	பகுதி
Partial derivative	—	பகுதிவகைக் கெழு
,, differentia tion	—	பகுவகைக் கெழு காணல்
Particle	—	துகள்
Particular	—	குறிப்பிட்ட
Perfect differential	—	நிறைவகையீடு
Perfectly elastic	—	நிறைமீள் சக்தியுடைய
Perfect square	—	நிறை வர்க்கம்
Peremeter	—	சுற்றளவு
Period	—	காலம், கால வட்டம்
Periodic function	—	திரும்புச் சார்பு
Permanent	—	நிலையான
Perpendicular	—	செங்குத்து
,, axis theorem	—	செங்குத்தச்சுத் தேற்றம்
Plane	—	தளம்
,, horizontal	—	கிடைத்தளம்
,, vertical	—	நிலைக்குத்துத் தளம்
Plot	—	குறித்தல்
Plus sign	—	கூட்டற்குறி
Point	—	புள்ளி
,, fixed	—	நிலைத்த புள்ளி
Pole	—	முனைவு இசைப் புள்ளி
Polygon	—	பல்கோணம்
Polinomial expression	—	பல்லுறுப்புக் கோவை
Positive	—	நேர், மிகை
Pound weight	—	ராத்தல்
Power	—	அடுக்கு, திறன்
,, series	—	அடுக்குத் தொடர்

Precise — திட்டமான
Pressure — அழுத்தம்
,, atmospheric — வழி மண்டலம்
,, centre of — அழுத்த மையம்
,, normal — செங்குத்தழுத்தம்
Primary — முதல்
Primitive — மூலம்
,, of differential equation — வகைக் கெழுச் சமன் பாட்டின் முதற் சார்பு மூலம்
Principal — தலையாய, முதல்
,, axis — தலையாய அச்சு
Principle — தத்துவம்
Prism — பட்டகம்
Problem — உத்திக் கணக்கு
Procedure — செய்முறை
Process — செய்கை
Produce — நீட்டுதல்
Product — பெருக்கம்
Progression — விருத்தி, தொடர்
,, arithmetic — கூட்டுத் ,,
,, geometric — பெருக்குத் ,,
, hormonic — இசைத் ,,
Proof — நிறுவல்
Property — தன்மை, பண்பு
Proportion — விகித சமம்
Prove — நிறுவு, நிரூபி
Pull — இழுத்தல்
Pure geometry — தொரு வடிவ கணிதம்
Pure mathematics — தூய கணிதம்

Q

Quadrangle — நாற்கோணம்
Quadrant — நாற்பகுதி
Quadratic equation — இருபடிச் சமன்பாடு
,, expression — இருபடிக் கோவை
Quadrature — தொகை ஈடுகாண் முறை
Quadrilateral — நாற்கரம்
Quantity — கணியம்
Quarter — கால்
Quotient — ஈவு

R

Radial acceleration	— ஆர வேகவளர்ச்சி வீதம்
,, velocity	— ஆரைவேகம்
Radian measure	— ஆரையின் அளவை
Radius	— ஆரை
,, circum	— சுற்றுரை
,, ex	— வெளியாரை
,, in	— உள்ளாரை
,, of curvature	— வளைவாரை
,, gyration	— சுழியாரை
,, vector	— ஆரைத்திசையி
Range	— இடைவெளி
Rate	— வீதம்
,, of change of variable	— மாறிகள் மாறுவீதம்
Ratio, direct	— நேர் விகிதம்
,, direction	— திசைவிகிதம்
,, inverse	— நேர்மாறு விகிதம்
Rational	— விகிதமுறுகின்ற
,, coefficients	— விகிதமுறு குணகங்கள்
,, integral function	— விகிதமுறு முழுஎண் சார்பு
Reaction	— எதிர்வினை, எதிர்விசை
Real	— மெய்யான
Reasoning	— ஆய்வு
Reciprocal	— தலை கீழான
Reckon	— கணக்கிடு
Rectangle	— செவ்வகம்
Rectangular parallelopiped	— செவ்வக இணைகரத்திண்மம்
,, hyperbola	— செவ்வக அதிபர வளைவு
Rectification of curves	— வளைகோடுகளின் நீளங்காணல்
Rectilinear motion	— நேர் கோட்டியக்கம்
Reduce	— சுருக்குதல்
Reductio ad absurdum	— பொருந்தா முடிவு
Reduction	— ஒடுக்கம், கழிவு
,, formula	— சுருக்க வாய்பாடு
Reference	— குறிப்பீடு
Relation	— தொடர்பு
Relative	— சார்கின்ற
,, acceleration	— சார்முடுக்கம்

Relative motion	—	சாரியக்கம்
,, velocity	—	சார்வேகம்
Remainder	—	மீதி
Required	—	வேண்டிய
Residue	—	எச்சம்
Resist	—	தடுத்தல்
Resistance	—	தடை
Resolution	—	பிரிப்பு, கூறுபாடு
Resolution into factors	—	காரணிகளாகப் பிரித்தல்
Resultant	—	விளைவு
Retardation	—	வேகத்தளர்ச்சி வீதம்
Reverse	—	முன் பின்னுக்குதல்
Revision	—	மீள்பார்வை
Revolution	—	சுற்றல், சுற்று
Rhombus	—	சாய்சதுரம்
Right angle	—	செங்கோணம்
Rigid	—	விறைப்பான
Rigorous proof	—	செவ்விய நிறவல்
Ring	—	வளையம்
Root	—	மூலம்
,, imaginary	—	கற்பனை மூலம்
,, real	—	மெய் மூலம்
,, square	—	வர்க்க, இருபடி மூலம்
,, coincident	—	பொருந்து மூலங்கள்
Rotate	—	சுழற்றுதல்
Rotation	—	சுழற்சி
,, axis of	—	சுழற்சி அச்சு
Roughly	—	சுமாராக
Rows and columns	—	நிரையும், நிரலும்
Rule	—	விதி

S

Scalar	—	திசையிலி
Scale	—	அளவுத் திட்டம்
Secant	—	வெட்டுக்கோடு
Second	—	விநாடி
Secondary	—	துணையான
Sector	—	வட்டகோணப் பகுதி
Segment	—	துண்டு

Semi	—	அரை
Sequance	—	தொடர்ச்சி, தொடர் முறை
Series	—	தொடர்
,, absolutely convergent	—	அறவொருங்குத் தொடர்
,, alternating	—	ஆடற்றொடர்
,, arithmetic	—	கூட்டல் தொடர்
,, ascending	—	ஏறு ,,
,, auxiliary	—	துணைத் ,,
,, binomial	—	ஈருறுப்புத் ,,
,, complex	—	சிக்கற் ,,
,, convergent	—	ஒருங்கற் ,,
,, exponential	—	அடுக்குக்குறித் ,,
,, geometric	—	பெருக்கற் ,,
,, harmonic	—	இசைத் ,,
,, infinite	—	முடிவிலாத் ,,
,, logarithmic	—	மடக்கைத் ,,
,, oscillatory	—	அலைவுத் ,,
,, power	—	அடுக்குத் ,,
,, summation of	—	தொடர் கூட்டல்
,, trigonometric	—	திருகோண, கணிதத் தொடர்
Sign	—	குறி
Significant figures	—	பொருளுடைய இலக்கங்கள்
Similar	—	வடிவொத்த
Simplification	—	சுருக்கல்
Sine	—	சைன், நெடுக்கை
Simple equation	—	எளிய சமன்பாடு
Simultaneous ,,	—	ஒருங்கமை சமன்பாடு
Singular point	—	சிறப்புப் புள்ளி
Size	—	பருமன்
Sketch	—	வரைபடம்
Slant height	—	சாய்வுயரம்
Slope	—	சரிவு
Smooth	—	உராய்வற்ற
Solid	—	கன உருவம்
,, cone	—	திண்மக் கூம்பு
,, cylinder	—	திண்ம உருளை
,, geometry	—	கனவடிவ கணிதம்
Solution	—	தீர்வு
Solve	—	தீர்த்தல்
Space	—	இடம், வெளி

Space two dimentional	—	இருபரிமாண வெளி
,, three ,,	—	முப்பரிமாண வெளி
Speed	—	வேகம்
,, average	—	சராசரி வேகம்
,, relative	—	சார்பு, தராதர வேகம்
Sphere	—	கோளம்
,, hollow	—	உள்ளீடற்ற கோளம்
,, solid	—	திண்மக் கோளம்
Spherical coordinates	—	கோள ஆயத் தொலைகள்
,, surface	—	கோள மேற்பரப்பு
Spheroid	—	கோள உரு
Spin	—	சுழல்
Spiral	—	சுருளி
Square	—	வர்க்கம், சதுரம்
,, measure	—	சதுர அளவை
,, root	—	வர்க்க மூலம்
Stability	—	நிலைப்புத்தன்மை
Standard	—	திட்டமான, நியமம்
,, form	—	திட்ட அமைப்பு
,, unit	—	நியம அலகு
Statics	—	நிலை இயல்
Stationary	—	நிலையான
Steadily decreasing	—	ஒரியல்பாய் இறங்கும்
,, increasing	—	,, ஏறும்
Straight	—	நேரான
,, angle	—	நேர் கோணம்
,, line	—	நேர் கோடு
Subnormal	—	வரைச் செங்கோட்டடி
Subtangent	—	வரைதொடு கோட்டடி
Subtend	—	எதிர்கொள்
Subtraction	—	கழித்தல்
Successive	—	தொடர்ந்த, அடுத்தடுத்த
,, differentiation	—	தொடர்ந்த வகைக் கெழு காணல்
,, integration	—	தொடர்ந்த தொகை காணல்
Suffix	—	கீழ்க்குறி
Sum	—	தொகை, கூட்டுத் தொகை
,, algebraic	—	இயற்கணிதக் ,,
Summation	—	கூட்டல்
,, of series	—	தொடர் கூட்டல்

Surd — படி மூலம்
,, Conjugate — இணைவிகித முருமூலம்
Surface — மேற் பரப்பு
,, curved — வளைபரப்பு
,, of revolution — சுற்றின் மேற்பரப்பு
Symbol — குறியீடு
Symbolic representation — குறியீட்டு விளக்கம்
Symmetry — சமச்சீர்
,, axis of — சமச்சீரச்சு

T

Table — வாய்பாடு
Tangent — இருக்கைதொடுகோடு
Term — உறுப்பு
Test — சோதனை
,, Abels — அபெலின் சோதனை
,, Canchy's condensation — கேசியின் ஒருங்கற் சோதனை
,, d' Alembert's — தலம்பாட்டின் சோதனை
,, Dirict relet's — திரிசிலேயின் ,,
Test of convergence — ஒருங்கற்சோதனை
,, divergence — விரிவுச்
Tetrahedron — நான்முகி
Theorem — தேற்றம்
Theoretical proof — அறிமுறை நிறுவல்
Theory — அறிமுறை
Thickness — தடிப்பு
Thin — மெல்லிய
Thrust — அமுக்கம்
Time — நேரம்
Total — மொத்தம்
Transcendental function — கடந்தசார்பு
Transformation — உருவமாற்றம், நிலைமாற்றம்
,, of axes — அச்சு நிலைமாற்றம்
Transposition — இடமாற்றம்
Transversal — குறுக்குவெட்டி
Transverse — குறுக்கான
,, axis — குறுக்கச்சு
Trapezium — சரிவகம்

Trapezium isoscles — இருசமபக் கசரிவகம்
Trapezoid — சரிவகத்திண்மம்
Triangle — முக்கோணம்
Triangular prism — முக்கோணப் பட்டகம்
Trigonometric functions — திரிகோண விகிதச் சார்பு
,, ratios — திரிகோண கணித விகிதங்கள்
Trisection — முச்சமக் கூறிடல்
Truncated cone — நுனியிலாக் கூம்பு
,, prism — நுனியிலாப் பட்டகம்
Turn — திருப்புதல்

U

Undetermined — தேராத
,, cooffecient — தேராக் குணகம்
Uniform — ஒரேசீரான
Units — அலகுகள்
Unity — ஒன்று, ஒருமை
Universal — பொதுவான
Unlike — ஒவ்வாத
Unlimited — எல்லையில்லாத
Unsymmetrical — சமச்சீரல்லாத

V

Vacuum — வெற்றிடம்
Value — மதிப்பு, பெறுமானம்
,, absolute — தனிப் பெறுமானம்
,, approximate — தோராய மதிப்பு
,, intrinsic — உள்ளீட்டுப் பெறுமானம்
,, limiting — எல்லை மதிப்பு
,, maixmum — மீப்பெருமதிப்பு
,, minimum — மீச்சிறு ,,
,, real — உண்மை ,,
,, relative — சார்பு பெறுமானம்
Vanish — மறைதல்
Variable — மாறி
,, complex — சிக்கல் மாறி
,, dependent — சார்ந்தமாறி
,, independent — சார்பில் மாறி
,, point — மாறும் புள்ளி

Variate — மாறி
Vary — மாறுதல்
,, directly as — நேராக மாறுதல்
,, indirectly as — நேர்மாறாக மாறுதல்
Vector — வெக்டர், திசையி
Vector angle — ஆரைக்கோணம்
Velocity — வேகம்
,, angular — சுழல் வேகம்
,, areal — பரப்பு வேகம்
,, average — சராசரி திசைவேகம்
,, radical — ஆரைவேகம்
,, relative — சார்வேகம்
,, uniform — சீர் விசைவேகம்
Verification — சரிபார்த்தல்
Verify — சரிபார்
Vertex — உச்சி
Vertical — நிலைக்குத்திற் குரிய
,, angle — உச்சிக்கோணம்
,, component — நிலைக்குத்துக் கூறு
,, line — நிலைக்குத்துக்கோடு
,, plane — ,, தளம்
Volume — கனஅளவு, பருமம்
Vulgar function — பொது பின்னம்

W

Whole number — முழுஎண்
Width — அகலம்
Work — வேலை
Worth — பெறு மதிப்பு

X

X-axis — x அச்சு, திசை அச்சு

Y

Y-axis — y அச்சு, நிலை யச்சு

Z

Zero — பூச்சியம்
Zone — மண்டலம், வளையம்